COURS

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE

A9.

COURS

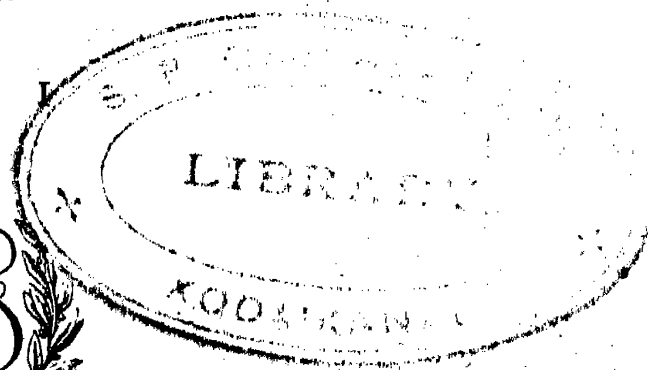
DE

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

M. H. ANDOYER

MEMBRE DE L'INSTITUT
ET DU BUREAU DES LONGITUDES
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

TOME I

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^ie^, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1923

PRÉFACE

Le présent Ouvrage est le développement des leçons que je consacre chaque année, pendant un semestre, depuis 1912, à l'enseignement de la Mécanique céleste. J'ai pleine conscience de la témérité de mon entreprise, venant après les travaux de F. Tisserand et de H. Poincaré : il m'a paru cependant qu'il y avait encore place pour un Ouvrage, intermédiaire en quelque sorte entre le Traité de Tisserand et les profondes recherches de Poincaré, dans lequel seraient exposées de la façon la plus simple, mais en même temps la plus complète, les solutions *pratiques* que donne l'Astronomie aux problèmes *réels* de la Mécanique céleste. C'est un tel Livre que j'ai tenté d'écrire, m'adressant aux astronomes praticiens, et plus précisément encore aux astronomes calculateurs; et, pour faciliter leur tâche, je me suis attaché presque exclusivement à développer, avec tous les détails nécessaires, les méthodes qui conduisent aux calculs les plus simples et les plus sûrs, en les illustrant toujours par des exemples numériques empruntés à la réalité.

Je me suis borné à l'étude de quelques problèmes fondamentaux; mais, parmi eux, j'ai compris ceux qui font l'objet de ce que l'on appelle souvent ailleurs l'*Astronomie théorique*, c'est-à-dire ceux qui se posent à l'occasion de la théorie de la détermination des orbites des petites planètes et des comètes; ils appartiennent vraiment en effet au domaine de la Mécanique céleste, comme je l'envisage ici, et on les rencontre trop fréquemment pour qu'il m'ait été possible de ne pas les traiter complètement.

En aucun cas, je ne me suis cru obligé de présenter les solutions des problèmes sous la forme même qui leur a été donnée par leurs premiers auteurs : mais j'ai pris la liberté de les modifier toutes les fois qu'une amélioration me semblait en résulter; et comme il s'agit d'un Ouvrage didactique, j'ai constamment dirigé mes efforts vers une exposition systématique, malgré la diversité des méthodes imposée par la diversité des circonstances.

L'Ouvrage comprend deux Volumes, et est divisé en six Livres d'étendue très inégale. Dans le premier Livre, je définis les problèmes à étudier, et j'expose les principes généraux qui doivent conduire à leur solution; le second est consacré à l'étude pratique complète du mouvement képlérien et de ses perturbations. On trouvera dans le Livre III la théorie des planètes, c'est-à-dire l'étude analytique générale des perturbations, lorsqu'elles sont développables sous la forme simple qui convient en particulier dans le cas des grosses planètes.

Les Livres IV, V, VI contiennent respectivement la théorie de la Lune, celle du mouvement de la Terre et de la Lune autour de leur centre de gravité, et enfin, la théorie des anciens satellites de Jupiter.

M. A. Lambert a bien voulu m'aider dans la révision des épreuves : je suis heureux de lui dire ici toute ma reconnaissance. Je dois aussi mes meilleurs remerciements à la maison Gauthier-Villars, dont les soins ont assuré la parfaite exécution typographique de cet Ouvrage.

H. ANDOYER.

8 décembre 1922.

COURS
DE
MÉCANIQUE CÉLESTE

LIVRE PREMIER.
LES PROBLÈMES GÉNÉRAUX DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE.

CHAPITRE I.
DÉFINITION ET RÉDUCTION DES PROBLÈMES GÉNÉRAUX DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE.

1. La *Mécanique céleste* est formée, d'après Laplace, « par l'ensemble des théories qui embrassent tous les résultats de la gravitation universelle sur l'équilibre et sur les mouvements des corps solides et fluides qui composent le système solaire et les systèmes semblables répandus dans l'immensité des cieux ». Dans ce domaine singulièrement vaste, et qui va s'élargissant chaque jour, on peut distinguer bien des parties : celle qui forme l'objet du présent Ouvrage est strictement limitée à l'étude analytique élémentaire des principaux phénomènes que nous pouvons observer dans les mouvements des astres du système solaire ; et c'est du point de vue astronomique que les problèmes y sont envisagés. En particulier, on regardera comme connues les données numériques de ces problèmes.

Suivant encore l'expression de Laplace, « l'Astronomie, considérée de la manière la plus générale, est un grand problème de Mécanique ». Cependant, il est manifeste, pour bien des raisons intuitives, que les problèmes *réels* de la Mécanique céleste échappent à l'ana-

lyse dans leur ensemble; nous sommes obligés de leur substituer des problèmes aussi voisins que possible, mais susceptibles d'être traités suivant les principes de la Mécanique rationnelle. On arrive à ce résultat grâce à une série d'hypothèses; la première consiste à regarder les corps célestes comme composés de points matériels formant des systèmes isolés dans l'espace, dont les dimensions sont petites par rapport à leurs distances : les mouvements de ces systèmes sont déterminés par leurs attractions mutuelles, suivant la loi de Newton.

2. Envisageons deux tels systèmes S et S′, composés respectivement de points matériels P et P′ dont les masses sont m et m'. Nous devons tout d'abord étudier le potentiel d'attraction de ces deux systèmes, c'est-à-dire, d'une façon précise, la fonction

$$U = \sum \frac{fmm'}{\overline{PP'}},$$

où f désigne le coefficient d'attraction, et où la sommation est étendue à tous les points P et P′ des deux systèmes.

Soient O et O′ les centres de gravité des deux systèmes, dont les points seront rapportés respectivement à deux trièdres d'axes de coordonnées rectangulaires, parallèles, $Oxyz$, $O'x'y'z'$, ayant pour origines O et O′, et dont les axes Ox, $O'x'$ coïncident avec OO′. Il sera d'ailleurs entendu une fois pour toutes que les systèmes d'axes de coordonnées rectilignes dont nous ferons usage, soit dans le plan, soit dans l'espace, seront toujours rectangulaires.

Soient x, y, z les coordonnées de P; x', y', z' celles de P′; r la distance OO′. On a

$$\begin{aligned}\overline{PP'}^2 &= (r + x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \\ &= r^2 - 2Pr + Q^2,\end{aligned}$$

en faisant

$$\begin{aligned}P &= x - x', \\ Q^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2;\end{aligned}$$

de sorte que

$$U = \sum \frac{fmm'}{r}\left(1 - 2\frac{P}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

On sait que l'expression

$$(1 - 2\omega t + \omega^2)^{-\frac{1}{2}},$$

où t est une quantité réelle, se développe, sous les conditions $|\omega| < 1$, $|t| \leqq 1$, en série convergente de la forme

$$1 + \omega X_1 + \omega^2 X_2 + \omega^3 X_3 + \ldots,$$

les X_n étant les fonctions de t connues sous le nom de *polynomes de Legendre*.

L'application de la formule du binome à l'expression considérée donne immédiatement

$$(1 - 2\omega t + \omega^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_1^\infty \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{1.2.3\ldots p} \left(\omega t - \frac{\omega^2}{2}\right)^p,$$

et par suite

$$X_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n} \times \left[t^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} t^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} t^{n-4} - \ldots\right],$$

de sorte qu'en particulier

$$X_1 = t, \qquad X_2 = \frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2}, \qquad X_3 = \frac{5}{2} t^3 - \frac{3}{2} t,$$

$$X_4 = \frac{35}{8} t^4 - \frac{15}{4} t^2 + \frac{3}{8}, \qquad X_5 = \frac{63}{8} t^5 - \frac{35}{4} t^3 + \frac{15}{8} t, \qquad \ldots.$$

Ces valeurs, écrites une fois pour toutes, nous seront plusieurs fois utiles.

Revenant à U, on voit que l'on est ramené au développement précédent en faisant $\omega = \frac{Q}{r}$, $t = \frac{P}{Q}$; les conditions de convergence sont vérifiées, car on a manifestement $P^2 \leqq Q^2$, et de plus $Q < r$, puisque les dimensions des systèmes sont petites par rapport à leur distance.

On peut donc écrire U sous la forme d'une série

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots,$$

en faisant

$$U_0 = \frac{f}{r} \sum mm',$$

et généralement

$$U_n = \frac{f}{r^{n+1}} \sum mm' Q^n X_n \left(\frac{P}{Q}\right);$$

et l'on voit que $Q^n X_n \left(\frac{P}{Q}\right)$ est un polynome homogène de degré n en P et Q, ne contenant que les puissances paires de Q.

Désignons par M et M′ les masses totales des deux systèmes, et observons que si φ et φ' sont deux fonctions quelconques ne dépendant respectivement que de x, y, z et x', y', z', on a

$$\sum mm'\varphi\varphi' = \left(\sum m\varphi\right) \times \left(\sum m'\varphi'\right);$$

rappelons de plus que O et O′ étant les centres de gravité des deux systèmes, on a les relations

$$\sum mx = \sum my = \sum mz = \sum m'x' = \sum m'y' = \sum m'z' = 0.$$

On a par suite immédiatement

$$U_0 = \frac{fMM'}{r};$$

et comme le coefficient de $\frac{f}{r^2}$ dans U_1 est $\sum mm'P$, il vient ensuite

$$U_1 = 0.$$

Le coefficient de $\frac{f}{r^3}$ dans U_2 est

$$\frac{1}{2}\sum mm'(3P^2 - Q^2),$$

c'est-à-dire, en n'écrivant pas les termes qui conduisent évidemment à des sommes nulles,

$$\sum mm'\left(x^2 - \frac{y^2+z^2}{2} + x'^2 - \frac{y'^2+z'^2}{2}\right),$$

ou encore

$$M'\sum m\left[x^2+y^2+z^2 - \frac{3}{2}(y^2+z^2)\right]$$
$$+ M\sum m'\left[x'^2+y'^2+z'^2 - \frac{3}{2}(y'^2+z'^2)\right].$$

Si donc G et G′ sont les moments d'inertie des deux systèmes S et S′ par rapport à leurs centres de gravité O et O′, H et H′ leurs moments d'inertie par rapport à la droite OO′ qui joint ces centres, on a

$$U_2 = \frac{fM'}{r^3}\left(G - \frac{3}{2}H\right) + \frac{fM}{r^3}\left(G' - \frac{3}{2}H'\right).$$

Soient encore Ox_1, Oy_1, Oz_1 les axes principaux d'inertie du

système S par rapport à son centre de gravité O, et appelons comme d'habitude A, B, C les moments d'inertie correspondants, tandis que α, β, γ sont les cosinus directeurs de OO′ par rapport à ces nouveaux axes; et introduisons les mêmes notations accentuées relativement au système S′. On a

$$G = \frac{1}{2}(A + B + C), \qquad H = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2;$$

n'oubliant pas que

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

il vient pour U_2 cette nouvelle forme

$$\begin{aligned} U_2 = {} & \frac{fM'}{r^3}\left[\alpha^2\left(\frac{B+C}{2} - A\right) + \beta^2\left(\frac{C+A}{2} - B\right) + \gamma^2\left(\frac{A+B}{2} - C\right)\right] \\ & + \frac{fM}{r^3}\left[\alpha'^2\left(\frac{B'+C'}{2} - A'\right) + \beta'^2\left(\frac{C'+A'}{2} - B'\right) + \gamma'^2\left(\frac{A'+B'}{2} - C'\right)\right]; \end{aligned}$$

ou encore, en détruisant la symétrie et faisant jouer un rôle spécial aux moments C et C′,

$$\begin{aligned} U_2 = {} & \frac{fM'}{4r^3}[(2C - A - B)(1 - 3\gamma^2) + 3(B - A)(\alpha^2 - \beta^2)] \\ & + \frac{fM}{4r^3}[(2C' - A' - B')(1 - 3\gamma'^2) + 3(B' - A')(\alpha'^2 - \beta'^2)]. \end{aligned}$$

On peut continuer dans la même voie le calcul des U_n; mais leurs expressions se compliquent rapidement. Il nous suffira pour l'instant de constater d'une façon générale que le coefficient de $\frac{f}{r^{n+1}}$ dans U_n est une somme de termes de la forme kKK', où k désigne un coefficient numérique, tandis que les K et K′ sont des quantités dépendant de la constitution des deux systèmes, et telles que l'on ait par exemple

$$K = \sum m x^p y^q z^r, \qquad K' = \sum m' x'^{p'} y'^{q'} z'^{r'},$$

les exposants p, q, r, p', q', r' étant des entiers positifs ou nuls dont la somme est n.

Ceci subsiste d'ailleurs entièrement, si les points des deux systèmes sont rapportés à d'autres axes ayant toujours pour origines les centres de gravité O et O′, les coefficients k devenant alors des fonctions des cosinus des angles que font les nouveaux axes entre eux et avec OO′.

3. Le point important est de pouvoir estimer l'ordre de grandeur relative des différents termes de la série $U_0 + U_2 + U_3 + \ldots$, qui représente le potentiel d'attraction U. Nous savons d'abord que les dimensions des systèmes S et S' sont petites par rapport à leur distance, c'est-à-dire, suivant le langage astronomique, que les parallaxes mutuelles des deux systèmes sont petites, et il est évident que le quotient $\frac{U_n}{U_0}$ est de l'ordre n par rapport à ces parallaxes.

Mais la convergence de la série U s'augmente beaucoup si l'on fait de nouvelles hypothèses, généralement voisines de la réalité quand les systèmes S et S' représentent des corps célestes. En premier lieu, il est manifeste que les U_n d'indice impair sont nuls si les systèmes sont constitués symétriquement par rapport à leurs centres de gravité, car alors les sommes K pour lesquelles $p + q + r$ est un nombre impair sont nulles : si cette condition, sans être vérifiée rigoureusement, est du moins près de l'être, on voit que les U_n d'indice impair acquièrent un nouveau facteur très petit.

En second lieu, il est bien connu que si les systèmes S et S' étaient constitués par des couches sphériques homogènes, la fonction U se réduirait à son premier terme U_0, de sorte que les U_n s'annuleraient tous, ainsi qu'on le constate immédiatement sur U_2, qui disparaît quand on a $A = B = C$, $A' = B' = C'$. Si comme la précédente, cette hypothèse, sans être vérifiée rigoureusement, est du moins près de l'être, nous voyons que les U_n d'indice pair acquièrent eux-mêmes un nouveau facteur petit, qui est pour U_2 par exemple, de l'ordre des différences des moments d'inertie pour chaque système.

Ce résultat peut être précisé davantage, si l'on suppose encore que les systèmes S et S' sont constitués par des couches homogènes ellipsoïdales, concentriques et coaxiales, voisines de la forme sphérique : et c'est là sans doute, au moins d'une façon très approchée, le cas du Soleil, des planètes et de leurs satellites, ainsi qu'il résulte de la théorie de la figure des corps célestes. Nous allons voir en effet que, dans ces conditions, les U_n d'indice pair sont de l'ordre $\frac{n}{2}$ par rapport aux excentricités des sections principales des couches; quant aux U_n d'indice impair, ils sont nuls, d'après ce qui a été dit plus haut. Ces résultats seront par suite très voisins de la réalité quand il s'agira des astres réels qui viennent d'être cités.

Pour démontrer la proposition relative aux U_n d'indice pair,

observons tout d'abord qu'il suffit de considérer le cas d'ellipsoïdes homogènes : car si elle est alors vérifiée, elle restera vraie pour deux couches ellipsoïdales, et par suite pour nos deux systèmes.

Rapportons les ellipsoïdes à leurs axes de symétrie : les quantités K et K' envisagées ci-dessus sont faciles à calculer. Désignons par a, b, c les demi-axes de S, et par M sa masse totale, de sorte que sa densité est $\frac{3M}{4\pi abc}$; les mêmes notations accentuées conviendront au second ellipsoïde S'.

Les points de S sont représentés par

$$\begin{aligned} x &= a\rho\cos\beta\cos\lambda, \\ y &= b\rho\cos\beta\sin\lambda, \\ z &= c\rho\sin\beta, \end{aligned}$$

ρ variant de 0 à 1, β de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, λ de 0 à 2π.

La masse m de la molécule correspondante est alors

$$\frac{3M}{4\pi}\rho^2\cos\beta\, d\rho\, d\beta\, d\lambda,$$

et l'on a

$$\begin{aligned} K = \sum m x^p y^q z^r = \frac{3M}{4\pi} a^p b^q c^r &\int_0^1 \rho^{p+q+r+2}\, d\rho \\ &\times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{p+q+1}\beta \sin^r\beta\, d\beta \\ &\times \int_0^{2\pi} \cos^p\lambda \sin^q\lambda\, d\lambda, \end{aligned}$$

les exposants p, q, r, étant nécessairement tous pairs, si K n'est pas nul.

Les formules élémentaires d'intégration donnent

$$K = M a^p b^q c^r \frac{[1.3.5\ldots(p-1)]\times[1.3.5\ldots(q-1)]\times[1.3.5\ldots(r-1)]}{5.7.9\ldots(p+q+r+3)},$$

les produits qui prennent une forme illusoire, quand l'un des nombres p, q, r ou leur somme s'annule, étant remplacés par l'unité.

On voit par là que, si n est pair, U_n se présente sous la forme d'un polynome homogène de degré $\frac{n}{2}$ par rapport à a^2, b^2, c^2, a'^2, b'^2, c'^2,

les coefficients de ce polynome dépendant des cosinus des angles que font entre eux et avec OO′ les axes des deux ellipsoïdes : ce résultat était d'ailleurs intuitif, et ce qui précède ne sert qu'à le préciser.

D'autre part, on démontre directement de la façon la plus simple, dans la théorie classique du potentiel newtonien, que le potentiel d'attraction entre un ellipsoïde tel que S et un point extérieur de masse m' dont les coordonnées sont ξ, η, ζ par rapport aux axes principaux de l'ellipsoïde, est égal à

$$\frac{3}{4} f m' \mathrm{M} \int_{\lambda_0}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2+\lambda} - \frac{\eta^2}{b^2+\lambda} - \frac{\zeta^2}{c^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

en désignant par λ_0 la racine positive unique de l'équation

$$1 - \frac{\xi^2}{a^2+\lambda} - \frac{\eta^2}{b^2+\lambda} - \frac{\zeta^2}{c^2+\lambda} = 0.$$

Cette expression, considérée comme fonction de a^2, b^2, c^2, ne change évidemment pas quand on augmente a^2, b^2, c^2 d'une même quantité, et par suite ne dépend que des différences $a^2 - b^2$, $a^2 - c^2$, par exemple. C'est le théorème démontré pour la première fois par Laplace dans toute sa généralité : deux ellipsoïdes homogènes homofocaux exercent sur un point qui leur est extérieur à tous deux des attractions de même direction, proportionnelles à leurs masses. Il est clair alors que le potentiel d'attraction de deux ellipsoïdes homogènes, considéré comme fonction des carrés de leurs demi-axes, a^2, b^2, c^2, a'^2, b'^2, c'^2, ne dépend que des différences $a^2 - b^2$, $a^2 - c^2$, $a'^2 - b'^2$, $a'^2 - c'^2$, par exemple, de sorte que la fonction U_n que nous étudions est un polynome homogène de degré $\frac{n}{2}$ par rapport à ces différences ; ce qui démontre la proposition annoncée.

4. Nous pouvons maintenant aborder la mise en équations et la réduction des problèmes généraux de la Mécanique céleste.

Envisageons l'Univers comme formé par le Soleil, constituant un système S_0, et par les planètes, les comètes et les étoiles, constituant des systèmes S_p, S_q, ... ; nous convenons ici, d'ailleurs, de joindre à chaque planète ses satellites, si elle en a.

En désignant généralement par S_i, S_j, ... les systèmes précédents, sans distinction, soient M_i le centre de gravité de S_i, m_i sa masse

totale; appelons X_i, Y_i, Z_i les coordonnées de M_i par rapport à des axes quelconques fixes dans l'espace, $f m_i m_j U_{ij}$ le potentiel d'attraction des deux systèmes S_i, S_j, et Δ_{ij} la distance $M_i M_j$ de leurs centres de gravité. On a

$$\Delta_{ij}^2 = (X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2,$$

et la fonction U_{ij} s'exprime à l'aide des différences de coordonnées $X_i - X_j$, $Y_i - Y_j$, $Z_i - Z_j$, en même temps qu'à l'aide d'autres variables qui ne font que déterminer à chaque instant la constitution des systèmes S_i, S_j.

Pour préciser, nommons λ_i, μ_i, ν_i, λ'_i, μ'_i, ν'_i, λ''_i, μ''_i, ν''_i les cosinus directeurs relativement aux axes fixes des axes d'inertie principaux de S_i; et A_i, B_i, C_i les moments d'inertie correspondants, généralement variables avec le temps. En se limitant aux premiers termes calculés précédemment de U_{ij}, on pourra écrire

$$U_{ij} = \frac{1}{\Delta_{ij}} + K_i^j + K_j^i,$$

où l'on fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} K_i^j = {} & \frac{B_i + C_i - 2A_i}{2m_i\Delta_{ij}^5}[\lambda_i(X_i - X_j) + \mu_i(Y_i - Y_j) + \nu_i(Z_i - Z_j)]^2 \\ & + \frac{C_i + A_i - 2B_i}{2m_i\Delta_{ij}^5}[\lambda'_i(X_i - X_j) + \mu'_i(Y_i - Y_j) + \nu'_i(Z_i - Z_j)]^2 \\ & + \frac{A_i + B_i - 2C_i}{2m_i\Delta_{ij}^5}[\lambda''_i(X_i - X_j) + \mu''_i(Y_i - Y_j) + \nu''_i(Z_i - Z_j)]^2. \end{aligned}$$

Les principes élémentaires de la Mécanique nous donnent comme équations du mouvement de M_i, en appelant t le temps,

$$\frac{d^2 X_i}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial X_i}\left(\sum_j f m_j U_{ij}\right);$$

nous nous bornons, ici comme dans la suite, à écrire l'équation relative au mouvement projeté sur l'axe des x, et la sommation est étendue, comme il est indiqué, à tous les indices j autres que i.

Nous pouvons donc dire encore que le mouvement de M_i est celui d'un point matériel libre, sous l'action d'une fonction de forces égale à $\sum_j f m_j U_{ij}$, la masse de ce point étant supposée égale à l'unité : cette

dernière hypothèse sera toujours conservée dans la suite, quand nous parlerons du mouvement d'un point matériel, à moins d'indication contraire.

Ce qui nous intéresse, c'est uniquement le mouvement relatif des planètes et des comètes par rapport au Soleil. Faisons donc

$$X_p - X_0 = x_p, \qquad Y_p - Y_0 = y_p, \qquad Z_p - Z_0 = z_p,$$

de sorte que x_p, y_p, z_p sont les coordonnées relatives de M_p par rapport au Soleil M_0 (si l'on confond dans le langage le Soleil avec son centre de gravité), les axes ayant des directions fixes dans l'espace.

Substituant les x_p, y_p, z_p aux X_p, Y_p, Z_p, il est bien clair que, d'après la composition des U_{ij}, les coordonnées X_0, Y_0, Y_0 se trouveront éliminées, elles aussi, puisque $X_p - X_q$ par exemple ne diffère pas de $x_p - x_q$.

Nous ferons encore, pour correspondre aux nouvelles coordonnées,

$$r_p^2 = x_p^2 + y_p^2 + z_p^2,$$
$$r_p r_q \cos H_{pq} = x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q,$$

de sorte que r_p est la distance $M_0 M_p$, et que H_{pq} est l'angle des vecteurs $M_0 M_p$, $M_0 M_q$.

On a

$$\frac{d^2 x_p}{dt^2} = \frac{d^2 X_p}{dt^2} - \frac{d^2 X_0}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial X_p}\left(f m_0 U_{0p} + \sum_q f m_q U_{pq}\right) - \frac{\partial}{\partial X_0}\left(f m_p U_{0p} + \sum_q f m_q U_{0q}\right);$$

or, il est manifeste que

$$\frac{\partial U_{0p}}{\partial X_p} = -\frac{\partial U_{0p}}{\partial X_0} = \frac{\partial U_{0p}}{\partial x_p}, \qquad \frac{\partial U_{pq}}{\partial X_p} = \frac{\partial U_{pq}}{\partial x_p};$$

de même

$$-\frac{\partial U_{0q}}{\partial X_0} = \frac{\partial U_{0q}}{\partial x_q},$$

et comme cette quantité est indépendante de x_p, y_p, z_p, rien n'empêche de l'écrire sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_p}\left(x_p \frac{\partial U_{0q}}{\partial x_q} + y_p \frac{\partial U_{0q}}{\partial y_q} + z_p \frac{\partial U_{0q}}{\partial z_q}\right).$$

On voit par là que le mouvement relatif de M_p par rapport au

Soleil M_0 est celui d'un point matériel, sous l'action d'une fonction de forces

$$U_p = f(m_0 + m_p) U_{0p} + \sum_q f m_q \left(U_{pq} + x_p \frac{\partial U_{0q}}{\partial x_q} + y_p \frac{\partial U_{0q}}{\partial y_q} + z_p \frac{\partial U_{0q}}{\partial z_q} \right);$$

les fonctions telles que U_{0p} et U_{pq} ne dépendent que des coordonnées relatives x_p, y_p, z_p, x_q, y_q, z_q, ... et des paramètres qui déterminent à chaque instant la constitution des systèmes S_0, S_p, S_q, ...

Examinons de plus près cette fonction U_p et les réductions qu'elle subit quand on tient compte des conditions réelles du problème, en supposant, tout d'abord, que M_p est une planète ou une comète.

En raison de la petitesse des parallaxes mutuelles des systèmes ici envisagés, le terme principal de U_{0p} est $\frac{f(m_0 + m_p)}{r_p}$; nous l'appellerons le *premier terme* de U_p, et nous allons supprimer dans cette fonction les termes qui sont extrêmement petits par rapport au premier. Cette façon de procéder est tout aussi légitime que les hypothèses qui nous ont permis de traiter le problème, en laissant systématiquement de côté toutes les actions que nous ignorons ou que nous ne pouvons soumettre à une analyse suffisamment sûre.

Les masses des petites planètes et des comètes sont absolument négligeables devant celle du Soleil; par suite ces astres restent sans action sensible. Nous allons voir qu'il en est de même pour les étoiles, en raison, cette fois, de la grandeur de leurs distances au Soleil.

Supposons en effet que M_q soit une étoile, et réduisons d'abord les fonctions U_{pq} et U_{0q} à leurs premiers termes $\frac{1}{\Delta_{pq}}$, $\frac{1}{r_q}$.

On a

$$\begin{aligned}\Delta_{pq}^2 &= (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2 \\ &= r_q^2 - 2 r_q r_p \cos H_{pq} + r_p^2,\end{aligned}$$

et par suite

$$\frac{1}{\Delta_{pq}} = \frac{1}{r_q} \left(1 - 2 \frac{r_p}{r_q} \cos H_{pq} + \frac{r_p^2}{r_q^2} \right)^{-\frac{1}{2}};$$

développant comme au n° 2 suivant les puissances du rapport très petit $\frac{r_p}{r_q}$, il vient

$$U_{pq} = \frac{1}{r_q} + \frac{r_p}{r_q^2} \cos H_{pq} + \frac{r_p^2}{2 r_q^3} (3 \cos^2 H_{pq} - 1) + \ldots;$$

d'autre part, on a

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r_q}\right)}{\partial x_q} = -\frac{x_q}{r_q^3},$$

d'où

$$x_p \frac{\partial U_{0q}}{\partial x_q} + y_p \frac{\partial U_{0q}}{\partial y_q} + z_p \frac{\partial U_{0q}}{\partial z_q} = -\frac{r_p}{r_q^2} \cos H_{pq}.$$

La partie de U_p qui correspond à l'action de M_q est donc, après suppression du terme en $\frac{1}{r_q}$, qui est indépendant de x_p, y_p, z_p, et par suite ne peut rien donner dans les équations du mouvement,

$$fm_q\left[\frac{r_p^2}{2r_q^3}(3\cos^2 H_{pq} - 1) + \ldots\right]$$

comme la masse m_p est petite relativement à m_0, on voit que le rapport de cette partie de U_p au premier terme a pour valeur absolue maxima, d'une façon au moins très approchée,

$$\frac{m_q}{m_0}\left(\frac{r_p}{r_q}\right)^3.$$

D'après ce que nous savons sur les parallaxes des étoiles, il faudrait, suivant le mot de Laplace, attribuer à la masse m_q une valeur entièrement invraisemblable pour que ce rapport pût cesser d'être absolument insensible.

Si maintenant on envisageait les valeurs complètes de U_{pq} et U_{0q}, on verrait immédiatement que le rapport des termes complémentaires de U_p au premier terme de cette fonction est au moins de l'ordre du produit de $\frac{m_q}{m_0}\frac{r_p}{r_q}$ par le carré du rapport des parallaxes mutuelles des deux systèmes S_p et S_q, ou bien S_0 et S_q : il est donc encore absolument insensible.

Concluons en résumé que dans la fonction U_p qui détermine le mouvement relatif d'une planète ou comète M_p par rapport au Soleil M_0, la sommation ne doit être étendue qu'aux indices q qui correspondent à toutes les grosses planètes; bien entendu, il faut exclure p de cette sommation, si M_p est une grosse planète, et dans le cas contraire, on doit prendre $m_p = 0$.

Un calcul déjà fait montre alors que si l'on réduit les fonctions U_{0p},

U_{0q}, U_{pq} à leurs termes principaux, on a

$$U_p = \frac{f(m_0 + m_p)}{r_p} + \sum_q f m_q \left(\frac{1}{\Delta_{pq}} - \frac{r_p}{r_q^2} \cos H_{pq}\right),$$

avec

$$\Delta_{pq}^2 = r_p^2 - 2 r_p r_q \cos H_{pq} + r_q^2.$$

Il nous reste à chercher quelle peut être l'influence des termes qui complètent les fonctions U_{0p}, U_{pq}. Examinons d'abord K_0^p : le rapport de ce terme à $\frac{1}{r_p}$ est de l'ordre du carré du diamètre apparent du Soleil, vu de M_p, et admet en outre un facteur de l'ordre des différences mutuelles des moments d'inertie du Soleil, ou, comme on dit habituellement, de l'ordre de l'ellipticité du Soleil; il est par suite très petit, et l'influence de K_0^p ne pourrait peut-être devenir sensible que pour les planètes M_p les plus rapprochées du Soleil. Mais comme l'ellipticité de cet astre paraît inappréciable, nous devons encore laisser de côté K_0^p.

On doit évidemment dire la même chose de K_p^0 ou de K_p^q, si la planète M_p n'a pas de satellites, en tenant compte cette fois non pas tant de la petitesse de l'ellipticité de la planète que de celle de ses dimensions; dans le cas contraire, un examen plus attentif est nécessaire.

La planète M_p ayant des satellites, désignons par M_{p_0} et m_{p_0} le centre de gravité et la masse de la planète elle-même; par M_{p_1}, M_{p_2}, ..., m_{p_1}, m_{p_2}, ... les centres de gravité et les masses des différents satellites; on a par suite

$$m_p = m_{p_0} + m_{p_1} + m_{p_2} + \ldots$$

On peut écrire évidemment

$$U_{0p} = \frac{m_{p_0}}{m_p} U_{0p_0} + \frac{m_{p_1}}{m_p} U_{0p_1} + \frac{m_{p_2}}{m_p} U_{0p_2} + \ldots,$$

puisque le potentiel d'attraction entre les systèmes S_0 et S_p est la somme des potentiels d'attraction entre S_0 et les différents systèmes partiels qui composent S_p.

Les fonctions U_{0p_0}, U_{0p_1}, U_{0p_2}, ... peuvent être réduites certainement à leurs premiers termes, d'après ce qui précède, puisque, ici encore, la petitesse des ellipticités et des dimensions des corps célestes

vient détruire l'influence des termes complémentaires; et par suite

$$U_{0p} = \frac{m_{p_0}}{m_p}\frac{1}{\Delta_{0p_0}} + \frac{m_{p_1}}{m_p}\frac{1}{\Delta_{0p_1}} + \frac{m_{p_2}}{m_p}\frac{1}{\Delta_{0p_2}} + \ldots .$$

Soient $\xi_{p_0}, \eta_{p_0}, \zeta_{p_0}, \xi_{p_1}, \eta_{p_1}, \zeta_{p_1}, \ldots$ les coordonnées de $M_{p_0}, M_{p_1}, \ldots$ par rapport à M_p, centre de gravité du système, de sorte que

$$m_{p_0}\xi_{p_0} + m_{p_1}\xi_{p_1} + m_{p_2}\xi_{p_2} + \ldots = 0;$$

on a

$$\Delta_{0p_0}^2 = \left(x_p - \frac{m_{p_1}}{m_{p_0}}\xi_{p_1} - \frac{m_{p_2}}{m_{p_0}}\xi_{p_2} - \ldots\right)^2 + \ldots,$$
$$\Delta_{0p_1}^2 = (x_p + \xi_{p_1})^2 + \ldots,$$
$$\Delta_{0p_2}^2 = (x_p + \xi_{p_2})^2 + \ldots;$$

développant alors comme au n° 2 suivant les puissances des rapports toujours fort petits tels que $\frac{\xi_{p_1}}{r_p}$, on voit immédiatement que U_{0p} ne diffère de $\frac{1}{r_p}$ que par des termes qui sont au moins du second ordre relativement à ces quantités, et qui, en outre, renferment un facteur de l'ordre du rapport de la masse d'un satellite à la masse de la planète. Il en résulte que la fonction U_{0p}, qui figure dans U_p, peut encore se réduire à son premier terme $\frac{1}{r_p}$, sauf peut-être s'il s'agit de la Terre, le rapport de la masse de la Lune à celle de la Terre n'étant pas très petit. Cette conclusion reste vraie dans le cas de Saturne, si l'on considère l'anneau comme formé par la réunion d'un très grand nombre de satellites, parce que la masse totale de cet anneau est très petite par rapport à celle de la planète.

Quant aux fonctions U_{pq} et U_{0q} qui paraissent encore dans U_p, les mêmes considérations montrent qu'on peut certainement les réduire toujours de la même façon à leurs premiers termes, puisqu'elles sont toujours accompagnées du petit facteur m_q.

Finalement, nous voyons que le seul cas où la fonction de forces U_p, telle que nous l'avons écrite en dernier lieu, doit être affectée d'un terme complémentaire, est celui où M_p est le centre de gravité du système formé par la Terre et la Lune. Pour calculer ce terme complémentaire, nous allons profiter de la circonstance que la Lune est satellite unique.

Appelons alors $x_{p_1}, y_{p_1}, z_{p_1}$ les coordonnées relatives de la Lune,

c'est-à-dire plus exactement de son centre de gravité M_{p_1}, par rapport à la Terre; on aura

$$\xi_{p_1} = \frac{m_{p_0}}{m_p} x_{p_1}, \qquad \ldots;$$

de sorte qu'en appelant r_{p_1} la distance $M_{p_0}M_{p_1}$ de la Terre à la Lune, et H_{pp_1} l'angle des vecteurs M_0M_p et $M_{p_0}M_{p_1}$ ou $M_pM_{p_1}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} U_{0p} = & \frac{m_{p_0}}{m_p}\frac{1}{r_p}\left(1 - 2\frac{m_{p_1}}{m_p}\frac{r_{p_1}}{r_p}\cos H_{pp_1} + \frac{m_{p_1}^2}{m_p^2}\frac{r_{p_1}^2}{r_p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ & + \frac{m_{p_1}}{m_p}\frac{1}{r_p}\left(1 + 2\frac{m_{p_0}}{m_p}\frac{r_{p_1}}{r_p}\cos H_{pp_1} + \frac{m_{p_0}^2}{m_p^2}\frac{r_{p_1}^2}{r_p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

développant comme au n° 2, il vient, en réduisant le coefficient de $\frac{r_{p_1}^2}{r_p^3}$,

$$U_{0p} = \frac{1}{r_p} + \frac{m_{p_0}m_{p_1}}{m_p^2}\frac{r_{p_1}^2}{r_p^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2 H_{pp_1} - \frac{1}{2}\right) + \ldots,$$

et le terme complémentaire très petit de U_p est finalement, en n'allant pas plus loin dans ce développement,

$$f\frac{(m_0 + m_p)m_{p_0}m_{p_1}}{m_p^2}\frac{r_{p_1}^2}{r_p^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2 H_{pp_1} - \frac{1}{2}\right).$$

5. Déterminons maintenant les mouvements relatifs des satellites d'une planète M_p par rapport à cette planète.

Comme ci-dessus, nous désignons par M_{p_0} et m_{p_0} le centre de gravité et la masse de la planète elle-même; par M_{p_1}, M_{p_2}, ..., m_{p_1}, m_{p_2}, ... les centres de gravité et les masses de ses différents satellites; de plus, par x_{p_1}, y_{p_1}, z_{p_1}, ... les coordonnées relatives, comptées toujours parallèlement aux axes fixes, de M_{p_1}, ... par rapport à la planète elle-même M_{p_0}.

En désignant toujours par X_i, Y_i, Z_i les coordonnées absolues d'un point quelconque M_i par rapport aux axes fixes, on a

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_{p_1}}{dt^2} &= \frac{d^2X_{p_1}}{dt^2} - \frac{d^2X_{p_0}}{dt^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial X_{p_1}}(fm_{p_0}U_{p_0p_1} + fm_{p_2}U_{p_1p_2} + fm_0U_{0p_1} + fm_qU_{p_1q}) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial X_{p_0}}(fm_{p_1}U_{p_0p_1} + fm_{p_2}U_{p_0p_2} + fm_0U_{0p_0} + fm_qU_{p_0q}); \end{aligned}$$

dans cette formule les sommations par rapport aux indices p_2, p_3, ... d'une part, et par rapport aux indices q d'autre part, sont sous-entendues.

Laissant de côté les paramètres qui fixent la constitution des différents systèmes envisagés, nous voyons d'abord que $U_{p_0p_1}$, $U_{p_0p_2}$, ... sont des fonctions des différences de coordonnées $X_{p_1}-X_{p_0}$, ..., $X_{p_2}-X_{p_0}$, ... égales respectivement à x_{p_1}, ..., x_{p_2}, ...; de même $U_{p_1p_2}$ est fonction des différences $X_{p_1}-X_{p_2}$, ... égales à $x_{p_1}-x_{p_2}$, ...

D'après les propriétés du centre de gravité, on a

$$m_p X_p = m_{p_0}X_{p_0} + m_{p_1}(X_{p_0}+x_{p_1}) + m_{p_2}(X_{p_0}+x_{p_2}) + \ldots,$$

d'où

$$X_{p_0} = X_p - \mu_{p_1}x_{p_1} - \mu_{p_2}x_{p_2} - \ldots,$$

en désignant pour abréger par μ_{p_1}, ... les rapports $\frac{m_{p_1}}{m_p}$, ...

La fonction U_{0p_0} dépend des différences $X_{p_0}-X_0$, ... égales à

$$x_p - \mu_{p_1}x_{p_1} - \mu_{p_2}x_{p_2} - \ldots,$$

et ceci nous montre en passant comment on peut calculer immédiatement les coordonnées relatives de la planète M_{p_0} elle-même par rapport au Soleil; U_{0p_1} dépend des différences $X_{p_1}-X_0$, ... égales à

$$x_p + (1-\mu_{p_1})x_{p_1} - \mu_{p_2}x_{p_2} - \ldots;$$

de même enfin les fonctions U_{p_0q}, U_{p_1q} dépendent respectivement des différences $X_{p_0}-X_q$, ..., ou $X_{p_1}-X_q$, ..., égales à

$$x_p - x_q - \mu_{p_1}x_{p_1} - \mu_{p_2}x_{p_2} - \ldots,$$

ou bien à

$$x_p - x_q + (1-\mu_{p_1})x_{p_1} - \mu_{p_2}x_{p_2} - \ldots.$$

Il résulte immédiatement de ces remarques que le mouvement relatif du satellite M_{p_1} par rapport à la planète M_{p_0} est déterminé par une fonction de forces

$$\begin{aligned} U_{p_1} = {} & f(m_{p_0}+m_{p_1})U_{p_0p_1} \\ & + fm_{p_2}\left(U_{p_1p_2} + x_{p_1}\frac{\partial U_{p_0p_2}}{\partial x_{p_2}} + y_{p_1}\frac{\partial U_{p_0p_2}}{\partial y_{p_2}} + z_{p_1}\frac{\partial U_{p_0p_2}}{\partial z_{p_2}}\right) \\ & + fm_0\left(\frac{1}{1-\mu_{p_1}}U_{0p_1} + \frac{1}{\mu_{p_1}}U_{0p_0}\right) + fm_q\left(\frac{1}{1-\mu_{p_1}}U_{p_1q} + \frac{1}{\mu_{p_1}}U_{p_0q}\right), \end{aligned}$$

les sommations étant toujours sous-entendues.

Si l'on réduit d'abord les différentes fonctions U_{ij} qui figurent dans cette expression à leurs parties principales $\frac{1}{\Delta_{ij}}$, le premier terme de U_{p_1} est

$$\frac{f(m_{p_0}+m_{p_1})}{r_{p_1}}.$$

En appelant r_{p_1}, r_{p_2}, ... les distances $M_{p_0}M_{p_1}$, $M_{p_0}M_{p_2}$, ... et $H_{p_1p_2}$, ... les angles des vecteurs $M_{p_0}M_{p_1}$ et $M_{p_0}M_{p_2}$, ..., la partie de U_{p_1} qui provient de l'action du satellite M_{p_2} est, en répétant un calcul déjà fait,

$$fm_{p_2}\left(\frac{1}{\Delta_{p_1p_2}}-\frac{r_{p_1}}{r_{p_2}^2}\cos H_{p_1p_2}\right),$$

avec

$$\Delta_{p_1p_2}^2=r_{p_1}^2-2r_{p_1}r_{p_2}\cos H_{p_1p_2}+r_{p_2}^2.$$

Considérons maintenant la partie qui provient de l'action du Soleil M_0, soit

$$\frac{fm_0}{1-\mu_{p_1}}\frac{1}{\Delta_{0p_1}}+\frac{fm_0}{\mu_{p_1}}\frac{1}{\Delta_{0p_0}};$$

pour simplifier le calcul, introduisons un point fictif $M_{p'}$, de coordonnées relatives $x_{p'}$, $y_{p'}$, $z_{p'}$, par rapport à M_0, telles que

$$x_{p'}=x_p-\mu_{p_2}x_{p_2}-\mu_{p_3}x_{p_3}-\ldots,$$

et appelons $r_{p'}$ la distance $M_0M_{p'}$, $H_{p'p_1}$ l'angle des vecteurs M_0M_p et $M_{p_0}M_{p_1}$. L'expression à calculer devient

$$\frac{fm_0}{1-\mu_{p_1}}\left[r_{p'}^2+2(1-\mu_{p_1})r_{p'}r_{p_1}\cos H_{p'p_1}+(1-\mu_{p_1})^2r_{p_1}^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$+\frac{fm_0}{\mu_{p_1}}(r_{p'}^2-2\mu_{p_1}r_{p'}r_{p_1}\cos H_{p'p_1}+\mu_{p_1}^2r_{p_1}^2)^{-\frac{1}{2}};$$

on peut développer comme au n° 2, en se servant des polynomes de Legendre, et après suppression des termes en $\frac{1}{r_{p'}}$ qui sont indépendants de x_{p_1}, y_{p_1}, z_{p_1}, nous obtenons pour la partie de U_{p_1} qui correspond à l'action du Soleil, l'expression

$$fm_0\sum_2^{\infty}\left[(-1)^n(1-\mu_{p_1})^{n-1}+\mu_{p_1}^{n-1}\right]\frac{r_{p_1}^n}{r_{p'}^{n+1}}X_n(\cos H_{p'p_1});$$

le premier terme de ce développement, soit

$$f m_0 \frac{r_{p_1}^2}{r_{p'}^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2 H_{p'p_1} - \frac{1}{2}\right),$$

en est aussi le plus important; son rapport au premier terme de U_{p_1} est au plus égal, d'une façon très approchée, à

$$\frac{m_0}{m_{p_0}}\left(\frac{r_{p_1}}{r_{p'}}\right)^3;$$

cette quantité est toujours petite, bien que $\frac{m_0}{m_{p_0}}$ soit grand, parce que $\frac{r_{p_1}}{r_{p'}}$ est petit, et y figure au cube.

Dans le cas de la Lune, satellite unique, les quantités $\mu_{p_2}, \mu_{p_3}, \ldots$ n'existent pas, de sorte que $M_{p'}$ coïncide avec M_p : l'indice p' doit être partout remplacé par p dans ce qui précède.

Dans le cas d'un autre satellite, les quantités $\mu_{p_2}, \mu_{p_3}, \ldots$ existent plus ou moins nombreuses, mais sont toujours très petites; elles ne figurent d'ailleurs dans les formules qu'accompagnées de facteurs de l'ordre de $\frac{r_{p_2}}{r_p}, \frac{r_{p_3}}{r_p}, \ldots$, ainsi qu'il résulte de la définition de $M_{p'}$. On voit par suite que l'on pourra encore dans ce cas substituer simplement l'indice p à l'indice p' dans l'expression générale ci-dessus, et de plus négliger μ_{p_1} dans les coefficients : l'erreur ainsi commise sera tout à fait insensible.

Tout ce que nous venons de dire peut être répété sur la partie de U_{p_1} due à l'action du système S_q : il suffit de remplacer m_0 par m_q, puis, se servant du même point fictif $M_{p'}$, de mettre $\Delta_{p'q}$ à la place de $r_{p'}$, et à la place de $H_{p'p_1}$ l'angle $Q_{p'p_1}$ que font entre eux les vecteurs $M_q M_{p'}$ et $M_{p_0} M_{p_1}$; finalement on confondra l'indice p' avec p.

Il est clair que, comme au paragraphe précédent, l'indice q ne devra correspondre qu'aux grosses planètes autres que M_p.

On verra encore de la même façon qu'il ne peut y avoir lieu de tenir compte des parties négligées jusqu'ici dans les fonctions U_{ij} que dans le premier terme $f(m_0 + m_{p_1})\, U_{p_0 p_1}$ de U_{p_1}; et pour les raisons développées au n° 3, il suffit de se borner aux termes $K_{p_0}^{p_1}$ et $K_{p_1}^{p_0}$.

Relativement à ce dernier, il est toujours négligeable, en raison des dimensions des satellites, sauf peut-être dans le cas de la Lune. Quant à $K_{p_0}^{p_1}$, il faut toujours en tenir compte : on regardera alors les moments d'inertie A_{p_0}, B_{p_0}, C_{p_0} comme constants, et l'on fera de même pour $K_{p_1}^{p_0}$ dans le cas de la Lune.

Quand il s'agit d'un satellite de Saturne, on regarde l'anneau comme formant avec la planète un seul système S_{p_0}; dans ce cas, il peut paraître insuffisant de limiter la fonction $U_{p_0 p_1}$ aux termes $\frac{1}{\Delta_{p_0 p_1}} + K_{p_0}^{p_1}$, surtout quand il s'agit d'un satellite rapproché, puisque l'on ne peut plus invoquer la faiblesse de l'ellipticité du système S_{p_0} pour affirmer la convergence de la série qui représente $U_{p_0 p_1}$. Cependant, cette approximation est suffisante, en raison de la petitesse de la masse de l'anneau par rapport à celle de la planète, et plus encore peut-être en raison du peu de précision que l'on peut alors atteindre dans les observations.

Résumant maintenant tout ce qui précède, nous sommes amenés à distinguer très nettement le cas de la Lune de celui des autres satellites; d'autant plus que, dans ce dernier cas, on peut sans aucun inconvénient ne conserver que le premier terme de l'action du Soleil et laisser de côté l'action des planètes.

Dans le cas de la Lune, on doit, puisque la somme $m_{p_0} + m_{p_1}$ est égale à m_p, prendre comme fonction de forces déterminant son mouvement relatif par rapport à la Terre :

$$\begin{aligned} U_{p_1} = f m_p \left(\frac{1}{r_{p_1}} + K_{p_0}^{p_1} + K_{p_1}^{p_0} \right) \\ + f m_0 \sum_2^{\infty} \left[(-1)^n \left(\frac{m_{p_0}}{m_p} \right)^{n-1} + \left(\frac{m_{p_1}}{m_p} \right)^{n-1} \right] \frac{r_{p_1}^n}{r_p^{n+1}} X_n(\cos H_{pp_1}) \\ + f m_q \sum_2^{\infty} \left[(-1)^n \left(\frac{m_{p_0}}{m_p} \right)^{n-1} + \left(\frac{m_{p_1}}{m_p} \right)^{n-1} \right] \frac{r_{p_1}^n}{\Delta_{pq}^{n+1}} X_n(\cos Q_{pp_1}); \end{aligned}$$

les séries devront être limitées aux termes utiles; l'indice q se rapporte aux diverses grosses planètes. On a désigné par r_{p_1} la distance de la Terre à la Lune, par r_p et Δ_{pq} les distances $M_0 M_p$ et $M_0 M_q$; par H_{pp_1} et Q_{pp_1} les angles du vecteur $M_{p_0} M_{p_1}$ avec les vecteurs $M_0 M_p$ et $M_q M_p$; etc.

Dans le cas d'un autre satellite, son mouvement relatif par rapport à la planète dont il dépend, est déterminé par la fonction de forces

$$\begin{aligned} U_{p_1} = f(m_{p_0} + m_{p_1}) \left(\frac{1}{r_{p_1}} + K_{p_0}^{p_1} \right) \\ + f m_{p_2} \left(\frac{1}{\Delta_{p_1 p_2}} - \frac{r_{p_1}}{r_{p_2}^2} \cos H_{p_1 p_2} \right) + f m_0 \frac{r_{p_1}^2}{2 r_p^3} (3 \cos^2 H_{pp_1} - 1); \end{aligned}$$

l'indice p_2 se rapporte aux divers autres satellites de la même planète; $\Delta_{p_1 p_2}$ est la distance $M_{p_1}M_{p_2}$; $H_{p_1 p_2}$ est l'angle des vecteurs $M_{p_0}M_{p_1}$ et $M_{p_0}M_{p_2}$; etc. On pourrait d'ailleurs compléter aisément l'expression de U_{p_1} en tenant compte des termes précédemment calculés et laissés ici de côté.

6. Le dernier problème qui doit nous occuper est celui du mouvement de rotation des corps célestes sur eux-mêmes, autour de leurs centres de gravité. L'observation nous montre que ces mouvements se présentent comme peu différents d'une rotation uniforme permanente autour d'un axe d'inertie principal qui garde une direction fixe dans l'espace, et il est difficile de chercher une plus grande précision en dehors des cas qui nous sont immédiatement accessibles, c'est-à-dire ceux de la Terre et de la Lune, et, dans une certaine mesure, de Jupiter et de Mars. Pour les autres astres, nous nous contenterons de l'approximation précédente, et, en particulier, nous regarderons l'ensemble de Saturne et de son anneau comme tournant d'une seule pièce autour d'un axe de direction fixe, le plan de l'anneau ne paraissant pas s'écarter du plan de l'équateur de la planète.

Quant aux corps dont nous nous proposons d'étudier le mouvement autour de leurs centres de gravité, nous les assimilerons à des corps solides. C'est une hypothèse évidemment inexacte de bien des façons; cependant elle conduit à des résultats qui ne subissent aucune altération essentielle quand on se rapproche davantage de la réalité, ainsi que le montre une analyse plus approfondie qui ne saurait être séparée de l'étude de la figure et de la constitution même des corps célestes, et que par suite nous devons exclure ici.

Reprenant alors les notations générales définies au début du n° 4, nous supposons maintenant que M_i et M_j sont les centres de gravité non plus de deux systèmes, mais de deux corps célestes S_i, S_j. L'orientation du corps S_i est définie par trois paramètres φ_i, ψ_i, ω_i qui sont par exemple les angles d'Euler fixant les directions de ses axes principaux d'inertie; de sorte que les cosinus directeurs de ces axes, λ_i, μ_i, ν_i, ... sont des fonctions bien connues de ces paramètres.

Le mouvement de S_i autour de son centre de gravité est celui d'un corps solide autour d'un point fixe, et la fonction de forces qui détermine ce mouvement n'est autre que la somme des potentiels d'attrac-

tion entre S_i et les autres corps S_j, soit

$$f m_i \sum m_j U_{ij};$$

mais l'on ne doit garder dans cette fonction que les termes qui dépendent explicitement de φ_i, ψ_i, ω_i, quand on l'exprime généralement à l'aide des coordonnées absolues des points M_i, M_j, ... et des paramètres d'orientation de S_i, S_j, ...; de plus, il est suffisant, pour les raisons expliquées au n° 3, de réduire les fonctions U_{ij} aux termes calculés explicitement; la fonction de forces considérée se réduit donc à

$$V_i = f m_i \sum_j m_j K_i^j.$$

Mettant en évidence le rôle spécial que joue le moment désigné généralement par C_i, et le fait que la différence $B_i - A_i$ est ordinairement négligeable, nous écrirons, d'après le n° 2,

$$V_i = f \sum_j \frac{m_j}{4 \Delta_{ij}^3} [(2 C_i - A_i - B_i)(1 - 3\gamma_i^2) + 3(B_i - A_i)(\alpha_i^2 - \beta_i^2)],$$

en désignant par α_i, β_i, γ_i les cosinus des angles que fait le vecteur $M_i M_j$ avec les axes principaux d'inertie correspondant respectivement à A_i, B_i, C_i.

Dans V_i, la sommation devra être limitée aux corps susceptibles d'exercer une influence sensible : on peut juger de cette influence en comparant les termes correspondants de V_i à la demi-force vive du corps S_i, qui est d'une façon approchée, d'après ce qui a été dit plus haut, la moitié du produit de C_i, par exemple, par le carré de la vitesse angulaire de rotation. On reconnaît ainsi que dans le cas de Terre, il faut prendre pour S_j le Soleil et la Lune; dans le cas de la Lune, il faut prendre pour S_j la Terre et peut-être le Soleil; pour Jupiter, les S_j sont le Soleil et ses principaux satellites; pour Mars, il suffit de considérer l'action du Soleil. Ces approximations sont d'autant plus suffisantes qu'il n'y a pas lieu d'apporter la dernière rigueur à la solution d'un problème dont la mise en équations ne repose que sur une hypothèse, et dont les éléments ne peuvent pas être déterminés d'une façon très précise par les observations.

7. Nous avons ainsi ramené les problèmes généraux de la Mécanique céleste, dont l'étude doit former l'objet de cet Ouvrage, à un certain nombre de problèmes simples de Mécanique rationnelle, parfaitement définis; et, au surplus, il serait bien aisé, en suivant la même voie, de tenir compte des actions que nous avons systématiquement laissées de côté, si on le jugeait nécessaire.

Mais ces problèmes dépendent les uns des autres et ne sont pas susceptibles d'une solution analytique générale; ils se présentent d'ailleurs sous des aspects extrêmement divers, suivant les circonstances matérielles propres à chacun. On ne peut donc poursuivre leur solution qu'en procédant par étapes, dont la succession sera déterminée par ces circonstances mêmes; et ce n'est pas un procédé uniforme de solution qu'il faut rechercher, mais bien plutôt la méthode qui convient le mieux pour chaque question particulière.

Envisageons en particulier les mouvements relatifs des grosses planètes par rapport au Soleil; si l'on fait abstraction, dans le cas de la Terre, du petit terme complémentaire dû à l'action de la Lune calculé à la fin du n° 4, on voit que ces mouvements sont déterminés indépendamment de ceux des autres astres, et que tout se passe comme s'il s'agissait uniquement de points matériels, M_0 et les M_p, affectés des masses m_0 et m_p, soumis à leurs attractions mutuelles. Nous avons mis en évidence les mouvements relatifs des planètes M_p par rapport au Soleil M_0; mais il est avantageux, dans certains cas, d'avoir une forme un peu différente pour les équations qui détermineraient le mouvement de cet ensemble de points, bien que l'on soit obligé alors d'employer d'autres variables que celles qui se présentent comme les plus naturelles et comme les mieux adaptées aux usages astronomiques.

Le but que l'on cherche à atteindre est d'avoir à ne se servir que d'une fonction de forces unique pour déterminer les mouvements relatifs des points du système S formé par M_0 et les M_p. Les équations du mouvement général du système S résultent immédiatement, comme on sait, de la connaissance de la demi-force vive T et de celle de la fonction de forces U, égale à la somme des potentiels d'attraction des divers points de S, soit

$$U = \sum \frac{f m_i m_j}{\Delta_{ij}},$$

les indices i et j prenant les valeurs 0, p, q, ... relatives au Soleil et aux grosses planètes. Cette fonction U ne dépend que des distances mutuelles des points, c'est-à-dire de la configuration du système, indépendamment de sa position dans l'espace.

Quant à la fonction T, c'est

$$\frac{1}{2}\sum m_i\left(\frac{dX_i^2}{dt^2}+\frac{dY_i^2}{dt^2}+\frac{dZ_i^2}{dt^2}\right),$$

X_i, Y_i, Z_i étant toujours les coordonnées absolues de M_i.

Il faut choisir de nouvelles variables telles que T se présente sous la forme d'une somme de deux parties, dont l'une ne dépendra, comme U, que de la configuration du système S, tandis que l'autre correspondra au mouvement absolu de S.

On y arrive aisément en s'appuyant sur la remarque suivante : la force vive du système formé par deux points matériels M_0 et M_1, de masses m_0 et m_1, est la même que celle du centre de gravité G_1 du système, affecté de la masse m_0+m_1, augmentée de celle du point M_1 dans son mouvement relatif par rapport à M_0, à la condition de donner maintenant à M_1 la masse m'_1 égale à $\frac{m_0 m_1}{m_0+m_1}$. Cette remarque résulte immédiatement de l'identité évidente

$$m_0 u_0^2 + m_1 u_1^2 = (m_0+m_1)\left(\frac{m_0 u_0 + m_1 u_1}{m_0+m_1}\right)^2 + \frac{m_0 m_1}{m_0+m_1}(u_1-u_0)^2;$$

il suffit de prendre successivement pour u_0 et u_1 les projections des vitesses absolues de M_0 et M_1 sur les axes de coordonnées, et d'ajouter les résultats membre à membre.

Supposons, d'une façon générale, sans nous limiter spécialement au cas des grosses planètes et du Soleil, le système S composé de $n+1$ points M_0, M_1, ..., M_n, dont les masses sont m_0, m_1, ..., m_n et les vitesses absolues V_1, V_2, ..., V_n.

Soient G_1 le centre de gravité de M_0 et M_1 affecté de la masse μ_1 égale à m_0+m_1; G_2 le centre de gravité de G_1 et M_2, c'est-à-dire aussi de M_0, M_1, M_2, affecté de la masse μ_2 égale à μ_1+m_2 ou $m_0+m_1+m_2$; et ainsi de suite jusqu'à G_n, centre de gravité de G_{n-1} et M_n, c'est-à-dire du système total, avec la masse μ_n égale à $\mu_{n-1}+m_n$, ou $m_0+m_1+m_2+\ldots+m_n$.

La vitesse absolue de G_i sera φ_i; les coordonnées absolues de G_n, seules utiles, seront ξ_n, η_n, ζ_n.

Désignons maintenant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées relatives de M_1 par rapport à M_0 et par v_1 la vitesse correspondante; de même par x_2, y_2, z_2 les coordonnées relatives de M_2 par rapport à G_1, et par v_2 la vitesse correspondante; et ainsi de suite jusqu'à x_n, y_n, z_n, v_n, coordonnées relatives de M_n par rapport à G_{n-1} et vitesse correspondante.

Enfin, faisons encore, en convenant d'écrire μ_0 à la place de m_0 si la symétrie l'exige,

$$m'_1 = m_1 \frac{\mu_0}{\mu_1}, \qquad m'_2 = m_2 \frac{\mu_1}{\mu_2}, \qquad \ldots, \qquad m'_n = m_n \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}.$$

L'application répétée de la remarque ci-dessus donne successivement

$$\begin{aligned} m_0 V_0^2 + m_1 V_1^2 &= m'_1 v_1^2 + \mu_1 \varphi_1^2, \\ \mu_1 \varphi_1^2 + m_2 V_2^2 &= m'_2 v_2^2 + \mu_2 \varphi_2^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu_{n-1} \varphi_{n-1}^2 + m_n V_n^2 &= m'_n v_n^2 + \mu_n \varphi_n^2; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit immédiatement, par addition, que la demi-force vive T du système a pour valeur

$$\frac{1}{2} \sum_1^n m'_i \left(\frac{dx_i^2}{dt^2} + \frac{dy_i^2}{dt^2} + \frac{dz_i^2}{dt^2} \right) + \frac{1}{2} \mu_n \left(\frac{d\xi_n^2}{dt^2} + \frac{d\eta_n^2}{dt^2} + \frac{d\zeta_n^2}{dt^2} \right).$$

Quant à la fonction de forces U, elle dépend des distances mutuelles des points M_0, M_1, ..., M_n, distances qui s'expriment immédiatement à l'aide des projections des vecteurs M_0M_1, M_0M_2, ..., M_0M_n. En observant les égalités géométriques

$$\overline{M_0 M_2} = \overline{M_0 G_1} + \overline{G_1 M_2} = \frac{m_1}{\mu_1} \overline{M_0 M_1} + \overline{G_1 M_2},$$

$$\overline{M_0 M_3} = \overline{M_0 G_1} + \overline{G_1 G_2} + \overline{G_2 M_3} = \frac{m_1}{\mu_1} \overline{M_0 M_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \overline{G_1 M_2} + \overline{G_2 M_3},$$

on voit que ces projections sont respectivement :

$$\begin{array}{ll}
\text{pour } M_0M_1, & x_1, \quad y_1, \quad z_1; \\
\text{pour } M_0M_2, & x_2 + \dfrac{m_1}{\mu_1}x_1, \quad \ldots; \\
\text{pour } M_0M_3, & x_3 + \dfrac{m_2}{\mu_2}x_2 + \dfrac{m_1}{\mu_1}x_1, \quad \ldots; \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots; \\
\text{pour } M_0M_n, & x_n + \dfrac{m_{n-1}}{\mu_{n-1}}x_{n-1} + \ldots + \dfrac{m_2}{\mu_2}x_2 + \dfrac{m_1}{\mu_1}x_1, \quad \ldots.
\end{array}$$

Les équations du mouvement s'écrivent immédiatement; on a d'abord

$$\frac{d^2\xi_n}{dt^2} = 0, \qquad \ldots,$$

de sorte que G_n est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, ainsi qu'il arrive toujours pour le centre de gravité d'un système soustrait à toute action extérieure. Il vient ensuite

$$m'_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad \ldots$$

et par suite le mouvement relatif de M_1 par rapport à M_0, et généralement de M_i par rapport à G_{i-1}, est celui d'un point matériel de masse m'_i sous l'action de la fonction de forces U.

C'est le résultat cherché, que l'on pourrait d'ailleurs obtenir de bien d'autres façons en général : il est clair, en effet, que toute la question revient à mettre la forme quadratique complète,

$$m_0 u_0^2 + m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 + \ldots + m_n u_n^2,$$

sous la forme d'une somme de $n+1$ carrés de fonctions linéaires et homogènes par rapport aux u_i, les n premières de ces fonctions ne dépendant que des différences mutuelles des u_i, ou, ce qui est équivalent, la dernière de ces fonctions étant proportionnelle à

$$m_0 u_0 + m_1 u_1 + m_2 u_2 + \ldots + m_n u_n.$$

La solution classique indiquée ci-dessus est celle qui résulte de l'application répétée de la solution unique particulière au cas où l'on a $n = 1$.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS CANONIQUES. CHANGEMENT DE VARIABLES. MÉTHODE DE LA VARIATION DES CONSTANTES. THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

---

8. La forme canonique ou hamiltonienne des équations générales de la Dynamique en est la forme par excellence, surtout au point de vue théorique; nous n'en ferons pas cependant un usage exclusif, parce que les variables qu'elle impose ne sont pas d'habitude celles qui correspondent le mieux aux besoins et aux habitudes de l'Astronomie; elle aura surtout pour nous l'avantage de se prêter facilement aux changements de variables, et de réduire au maximum de simplicité la démonstration de plusieurs théorèmes importants.

Rappelons brièvement comment on obtient cette forme canonique, en nous limitant aux deux seuls problèmes que nous avons à traiter, celui du mouvement d'un point matériel et celui du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Soit d'abord le mouvement d'un point matériel M de masse égale à l'unité, sous l'action d'une fonction de forces U qui dépendra, en général, des coordonnées x, y, z de M par rapport à des axes fixes (ou plutôt que l'on peut considérer comme fixes), et du temps t. Appelons x', y', z' les dérivées de x, y, z par rapport au temps, c'est-à-dire les projections de la vitesse de M sur les axes; la force vive $2T$ du point est égale à $x'^2+y'^2+z'^2$, et si l'on fait $H=T-U$, les équations du mouvement prennent la forme canonique

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial x'}, \qquad \frac{dx'}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x},$$
$$\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots\dots;$$

x, y, z sont les premières variables, x', y', z' sont les deuxièmes variables, respectivement conjuguées des premières; H est la fonction caractéristique, dépendant de x, y, z, x', y', z', t.

Considérons maintenant le mouvement d'un corps solide autour

d'un point fixe O, origine des coordonnées, sous l'action d'une fonction de forces U, et désignons par $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ les axes principaux d'inertie du corps par rapport au point O : ces axes forment un trièdre de même orientation que le trièdre $Oxyz$ des coordonnées, et la position du corps est déterminée par trois paramètres φ, ψ, ω, par exemple les angles d'Euler qui fixent la situation relative des deux trièdres. Soient p, q, r les composantes de la rotation instantanée du corps sur les axes mobiles $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$: ce sont des fonctions linéaires et homogènes des dérivées φ', ψ', ω' de φ, ψ, ω par rapport au temps. Si A, B, C sont les moments d'inertie relatifs à $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, la force vive $2T$ du corps, égale à $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$, est une forme quadratique homogène de φ', ψ', ω', dont les coefficients dépendent de φ, ψ, ω; quant à la fonction de forces U, elle s'exprime à l'aide de φ, ψ, ω et du temps t. En appelant φ_1, ψ_1, ω_1 les dérivées partielles de T par rapport à φ', ψ', ω', et faisant $H = T - U$, après avoir eu soin de substituer φ_1, ψ_1, ω_1 à φ', ψ', ω' dans T, les équations du mouvement prennent la forme canonique

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \varphi_1}, \qquad \frac{d\varphi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi},$$
$$\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

la fonction caractéristique H dépendant des six variables φ, ψ, ω, φ_1, ψ_1, ω_1 et de t.

Dans ces deux cas, les équations ont la forme canonique générale

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

la fonction H dépendant des $2n$ variables conjuguées deux à deux x_i, y_i et de t.

9. Proposons-nous de faire un changement de variables dans les équations canoniques (1). Soient z_1, z_2, ..., z_{2n} les $2n$ nouvelles variables qu'il s'agit de substituer aux x_i, y_i, t restant toujours la variable indépendante. Les z_k sont des fonctions données des x_i, y_i et de t; ou bien, inversement, les x_i, y_i sont des fonctions données des z_k et de t. La fonction H sera exprimée soit à l'aide des x_i, y_i et de t, soit à l'aide des z_k et de t.

On peut procéder de la façon suivante, qui présente les plus grands

avantages. On a

$$\frac{\partial H}{\partial z_k} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial z_k} + \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial z_k} \right),$$

c'est-à-dire, en tenant compte des équations (1),

$$\frac{\partial H}{\partial z_k} + \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial z_k} \frac{dy_i}{dt} - \frac{\partial y_i}{\partial z_k} \frac{dx_i}{dt} \right) = 0.$$

Or, en n'oubliant pas que $\frac{\partial x_i}{\partial t}$, par exemple, représente la dérivée partielle par rapport à t de la fonction qui exprime x_i à l'aide des z_k et de t, on a

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_l \frac{\partial x_i}{\partial z_l} \frac{dz_l}{dt}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial y_i}{\partial t} + \sum_l \frac{\partial y_i}{\partial z_l} \frac{dz_l}{dt},$$

de sorte qu'il vient

$$\frac{\partial H}{\partial z_k} + \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial z_k} \frac{\partial y_i}{\partial t} - \frac{\partial y_i}{\partial z_k} \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) + \sum_l \left[\frac{dz_l}{dt} \times \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial z_k} \frac{\partial y_i}{\partial z_l} - \frac{\partial y_i}{\partial z_k} \frac{\partial x_i}{\partial z_l} \right) \right] = 0.$$

En entendant par $u, v, \ldots$ les diverses quantités z_k et t dont dépendent les x_i, y_i, posons

$$[u, v] = \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial y_i}{\partial v} - \frac{\partial y_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v} \right);$$

on a

$$\frac{\partial H}{\partial z_k} + [z_k, t] + \sum_l [z_k, z_l] \frac{dz_l}{dt} = 0; \tag{2}$$

ce sont les équations cherchées, et il suffit, pour les former explicitement, de connaître les expressions des x_i, y_i en fonction des z_k et de t. Toutefois, il reste à les résoudre par rapport aux inconnues $\frac{dz_l}{dt}$ qui y figurent linéairement.

Les $[u, v]$ sont des *crochets* de Lagrange; on a les identités

$$[u, u] = 0, \qquad [u, v] + [v, u] = 0,$$

et, par suite, le déterminant des coefficients des inconnues dans les équations (2) est un déterminant symétrique gauche d'ordre $2n$; sa valeur est manifestement le produit des deux déterminants fonction-

nels $\dfrac{D(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)}{D(z_1, z_2, z_3, \ldots)}$ et $\dfrac{D(y_1, -x_1, y_2, -x_2, \ldots)}{D(z_1, z_2, z_3, \ldots)}$, c'est-à-dire le carré du premier. Il en résulte que la résolution des équations (2) ne peut donner lieu à aucune difficulté si, comme on doit nécessairement le supposer, les x_i, y_i sont des fonctions distinctes des z_k.

Il serait d'ailleurs aisé d'obtenir par un calcul direct semblable au précédent les équations (2) résolues ; il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\frac{dz_k}{dt} &= \frac{\partial z_k}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial z_k}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial z_k}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt}\right)\\ &= \frac{\partial z_k}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial z_k}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{\partial z_k}{\partial y_i}\frac{\partial H}{\partial x_i}\right),\end{aligned}$$

et comme

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_l \frac{\partial H}{\partial z_l}\frac{\partial z_l}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial H}{\partial y_i} = \sum_l \frac{\partial H}{\partial z_l}\frac{\partial z_l}{\partial y_i},$$

il vient

$$\frac{dz_k}{dt} = \frac{\partial z_k}{\partial t} + \sum_l (z_k, z_l)\frac{\partial H}{\partial z_l}, \tag{3}$$

en faisant

$$(z_k, z_l) = \sum_i \left(\frac{\partial z_k}{\partial x_i}\frac{\partial z_l}{\partial y_i} - \frac{\partial z_k}{\partial y_i}\frac{\partial z_l}{\partial x_i}\right).$$

Les quantités (z_k, z_l) sont des *parenthèses* de Poisson, qui vérifient comme les crochets les identités

$$(z_k, z_k) = 0, \qquad (z_k, z_l) + (z_l, z_k) = 0.$$

Mais nous ferons presque exclusivement usage des équations (2), laissant d'ailleurs de côté tout développement analytique qui ne se rapporte pas directement à notre objet.

10. L'emploi des crochets de Lagrange est avantageusement remplacé par celui d'autres fonctions que nous allons maintenant définir. Désignant toujours par u, v, ... les différentes quantités z_k et t, et appelant K une fonction quelconque de u, v, ... dont nous pourrons disposer arbitrairement, posons

$$J_u = \frac{\partial K}{\partial u} + \sum_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial u};$$

on a évidemment

$$[u, v] = \frac{\partial J_u}{\partial v} - \frac{\partial J_v}{\partial u},$$

comme on le voit en effectuant les différentiations indiquées et réduisant.

Le calcul des $n(2n+1)$ crochets $[u, v]$ se ramène donc à celui des $2n+1$ quantités J_u, et dans le cas où le temps t est exclu des $u, v, \ldots$, ces nombres se réduisent respectivement à $n(2n-1)$ et $2n$.

En introduisant les fonctions J_u au lieu des crochets $[u, v]$, et faisant

$$H' = H - J_t,$$

les équations (2) deviennent

$$\frac{\partial H'}{\partial z_k} + \frac{\partial J_{z_k}}{\partial t} + \sum_l \left(\frac{\partial J_{z_k}}{\partial z_l} - \frac{\partial J_{z_l}}{\partial z_k}\right)\frac{dz_l}{dt} = 0. \tag{4}$$

Imaginons alors le cas particulier suivant, que nous rencontrerons le plus fréquemment : les $2n$ variables z_k se partagent en deux séries distinctes, de n variables chacune, les p_j et les q_j, de telle façon que les quantités J_{q_j} soient toutes nulles, tandis que les J_{p_j} sont indépendantes des p_j, c'est-à-dire s'expriment uniquement à l'aide des q_j et de t. Les équations (4) deviennent alors

$$\frac{\partial H'}{\partial p_k} + \frac{\partial J_{p_k}}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial J_{p_k}}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} = 0, \qquad \frac{\partial H'}{\partial q_k} - \sum_j \frac{\partial J_{p_j}}{\partial q_k}\frac{dp_j}{dt} = 0; \tag{5}$$

et l'on a ainsi, plus simplement, deux groupes distincts d'équations, les unes entre les $\frac{dq_j}{dt}$ et les $\frac{\partial H'}{\partial p_k}$, les autres entre les $\frac{dp_j}{dt}$ et les $\frac{\partial H'}{\partial q_k}$; bien entendu, la disposition symétrique gauche du déterminant des coefficients des dérivées $\frac{dp_j}{dt}$, $\frac{dq_j}{dt}$, dans l'ensemble de ces équations, est conservée.

Posons maintenant $q'_j = J_{p_j}$, et substituons les q'_j aux q_j, ce qui est possible d'après les hypothèses faites : les q_j deviennent des fonctions des q'_j et de t, comme les q'_j étaient des fonctions de q_j et de t. On a alors

$$\frac{\partial H'}{\partial q_k} = \sum \frac{\partial H'}{\partial q'_j}\frac{\partial q'_j}{\partial q_k},$$

et la comparaison de ces formules avec les dernières équations (5)

donne

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial q'_j};$$

comme, en outre, les premières équations (5) s'écrivent

$$\frac{dq'_j}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial p_j},$$

on voit qu'en associant aux p_i les q'_i comme variables conjuguées, on a conservé la forme canonique, la fonction caractéristique étant devenue H'; on réalise ainsi un changement canonique de variables, que l'on peut qualifier de complètement canonique si la fonction caractéristique H est elle-même conservée, c'est-à-dire si l'on a $J_t = 0$.

Si l'on veut garder les variables p_j et q_j, on a évidemment encore

$$(6) \qquad \frac{dp_j}{dt} = \sum_k \frac{\partial q_k}{\partial q'_j}\frac{\partial H'}{\partial q_k}, \qquad \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial q_j}{\partial t} - \sum_k \frac{\partial q_j}{\partial q'_k}\frac{\partial H'}{\partial p_k},$$

d'après les relations précédentes et en supposant les q_j exprimées en fonction des q'_j et de t. Ce système est équivalent au système (5) et jouit de propriétés analogues.

Voici une application générale importante des considérations précédentes. Supposons que les x_i dépendent uniquement des p_j et de t, et prenons pour la fonction arbitraire K, qui figure dans la définition des J, une fonction de même nature. Sans spécifier pour l'instant les q_j, on a $J_{q_l} = 0$. Par suite, en faisant

$$q_j = J_{p_j} = \frac{\partial K}{\partial p_j} + \sum_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial p_j},$$

on définit les nouvelles variables q_j que l'on peut associer aux p_j pour réaliser un changement canonique de variables.

Si, par exemple, les x_i sont des fonctions linéaires et homogènes à coefficients constants des p_j,

$$x_i = \alpha_i^1 p_1 + \alpha_i^2 p_2 + \ldots + \alpha_i^n p_n,$$

on aura, en prenant $K = 0$,

$$q_j = \alpha_1^j y_1 + \alpha_2^j y_2 + \ldots + \alpha_n^j y_n,$$

de sorte que les x_i et les y_i résultent respectivement des p_j et des q_j par deux substitutions linéaires transposées l'une de l'autre, ce qui revient à dire que l'on a identiquement

$$\sum_j p_j q_j = \sum_j x_i y_i.$$

Ce changement de variables est d'ailleurs complètement canonique puisque $J_t = 0$.

11. Le changement de variables s'effectue d'une façon particulièrement simple et intéressante dans un certain nombre de cas très importants.

Pour les mettre en évidence, nous allons établir dès maintenant quelques propositions générales relatives aux solutions d'un système d'équations canoniques, en nous attachant spécialement aux cas qui correspondent aux réalités des problèmes que nous aurons à étudier.

1° Soient x_i, y_i les solutions générales des équations

$$(7) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

F étant une fonction donnée de t, des x_i, y_i, et en outre d'un certain nombre de paramètres a_1, a_2, ... Les valeurs des x_i, y_i se présentent elles-mêmes comme des fonctions de t, des paramètres a_1, a_2, ..., et de $2n$ constantes arbitraires d'intégration c_1, c_2, ...; et lorsqu'on substitue ces valeurs dans la fonction F, celle-ci s'exprime d'une façon analogue.

Appelons u, v, ... les diverses quantités t, a_1, a_2, ..., c_1, c_2, ...; employons le signe ordinaire ∂ pour désigner les dérivées partielles d'une fonction de ces quantités, et afin d'éviter toute ambiguïté, usons du signe δ pour représenter les dérivées partielles de la fonction F prise sous sa forme primitive, c'est-à-dire exprimée à l'aide de t, x_i, y_i, a_1, a_2, ... De plus, faisons comme précédemment en désignant par K une fonction arbitrairement choisie de u, v, ...,

$$J_u = \frac{\partial K}{\partial u} + \sum_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial u},$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial y_i}{\partial v} - \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial y_i}{\partial u} \right) = [u, v] = \frac{\partial J_u}{\partial v} - \frac{\partial J_v}{\partial u}.$$

On a généralement

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\delta F}{\delta u} + \sum_i \left(\frac{\delta F}{\delta x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{\delta F}{\delta y_i} \frac{\partial y_i}{\partial u} \right),$$

la dérivée $\frac{\delta F}{\delta u}$ n'existant pas, si l'on choisit pour u l'une des constantes c_1, c_2, ...

Or le fait que x_i, y_i sont solutions des équations (7) se traduit par les relations

$$\frac{\delta F}{\delta y_i} = \frac{\partial x_i}{\partial t}, \qquad - \frac{\delta F}{\delta x_i} = \frac{\partial y_i}{\partial t};$$

il vient donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\delta F}{\delta u} + \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial y_i}{\partial u} - \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial y_i}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\delta F}{\delta u} + [t, u]. \end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\delta F}{\delta t}, \tag{8}$$

de sorte que si F ne dépend pas explicitement du temps t sous sa première forme, il en est encore de même quand on y remplace les x_i, y_i par leurs valeurs : c'est ce qu'on peut appeler, par une extension évidente, le théorème des forces vives.

En introduisant les fonctions J, et faisant

$$J_t = F + G,$$

la formule générale ci-dessus s'écrit

$$\frac{\partial J_u}{\partial t} = \frac{\delta F}{\delta u} + \frac{\partial G}{\partial u}. \tag{9}$$

La relation qui définit G donne d'ailleurs

$$\frac{\partial K}{\partial t} = F + G - \sum y_i \frac{\partial x_i}{\partial t} = F + G - \sum y_i \frac{\delta F}{\delta y_i};$$

la fonction G peut donc être choisie arbitrairement, et alors la fonction K en résulte par une quadrature, à une fonction arbitraire près des variables u, v, ..., autres que t.

Si l'on prend pour G une fonction indépendante des constantes

d'intégration c_1, c_2, ..., la formule (9) donne en particulier

$$\frac{\partial J_{c_k}}{\partial t} = 0;$$

les J_{c_k} sont donc des constantes ne dépendant que de a_1, a_2, ..., c_1, c_2, ...; il en est de même par suite des crochets $[c_k, c_l]$, et puisque ceux-ci sont indépendants du choix de K ou G, c'est pour eux une propriété caractéristique.

Supposons alors que, suivant la *méthode de la variation des constantes*, due à Lagrange, on veuille mettre la solution générale des équations (1), où la fonction caractéristique est H, sous la même forme que la solution générale des équations (7), où la fonction caractéristique est F, en considérant les quantités c_1, c_2, ..., non plus comme des constantes, mais comme des fonctions convenablement choisies de t. Cela revient à substituer aux x_i, y_i, dans les équations (1), les nouvelles variables c_1, c_2, ..., définies par les relations qui expriment la solution générale des équations (7) en fonction de ces quantités. Par suite, puisque les J_{c_k} sont des constantes, et que l'on a $J_t = F + G$, la fonction G étant indépendante des c_k, les équations (4) du numéro précédent prennent la forme plus simple

$$\frac{\partial(H - F)}{\partial c_k} + \sum_l \left(\frac{\partial J_{c_k}}{\partial c_l} - \frac{\partial J_{c_l}}{\partial c_k}\right) \frac{dc_l}{dt} = 0,$$

et pour calculer les coefficients constants des dérivées $\frac{dc_l}{dt}$, il suffit de donner à t une valeur particulière. On peut ensuite développer les mêmes considérations que ci-dessus, si les c_k se partagent en deux séries telles que les p_j, q_j.

2° Répartissons maintenant les paramètres a_1, a_2, ... en deux séries, a', b', ..., d'une part, μ', ν', ..., d'autre part; et, en appelant m', n', ..., des fonctions de a', b', ..., envisageons les *arguments* linéaires par rapport au temps

$$M' = m't + \mu', \qquad N' = n't + \nu', \qquad \ldots.$$

De la même façon, partageons les constantes c_1, c_2, ... en deux séries a, b, ... μ, ν, ..., et introduisons les arguments

$$M = mt + \mu, \qquad N = nt + \nu, \qquad \ldots,$$

en désignant par m, n, ..., des fonctions de a, b, ..., a', b', ...

Substituons alors les arguments M, N, ..., M′, N′, ... aux constantes μ, ν, ..., μ', ν', ... dans l'ensemble des quantités u, v, ... La dérivée *complète* par rapport au temps d'une fonction f de u, v, ... est actuellement

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum m \frac{\partial f}{\partial M} + \sum m' \frac{\partial f}{\partial M'},$$

les sommations s'étendant à tous les arguments M, N, ..., d'une part, M′, N′, ..., d'autre part; et le fait que les valeurs de x_i, y_i vérifient les équations (7) se traduit par les égalités

$$\frac{\delta F}{\delta y_i} = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum m \frac{\partial x_i}{\partial M} + \sum m' \frac{\partial x_i}{\partial M'},$$

$$-\frac{\delta F}{\delta x_i} = \frac{\partial y_i}{\partial t} + \sum m \frac{\partial y_i}{\partial M} + \sum m' \frac{\partial y_i}{\partial M'}.$$

On a par suite

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\delta F}{\delta u} + \sum_i \left(\frac{\delta F}{\delta x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{\delta F}{\delta y_i}\frac{\partial y_i}{\partial u}\right)\\ &= \frac{\delta F}{\delta u} + [t, u] + \sum m\,[M, u] + \sum m'\,[M', u];\end{aligned}$$

en introduisant les fonctions J et faisant

$$J_t = F + G - \sum m\,J_M - \sum m'\,J_{M'},$$

ceci devient

$$\frac{dJ_u}{dt} = \frac{\delta F}{\delta u} + \frac{\partial G}{\partial u} - \sum \frac{\partial m}{\partial u} J_M - \sum \frac{\partial m'}{\partial u} J_{M'}. \tag{10}$$

La relation qui définit G donne d'ailleurs

$$\frac{dK}{dt} = F + G - \sum y_i \frac{dx_i}{dt} = F + G - \sum y_i \frac{\delta F}{\delta y_i};$$

la fonction G peut donc être choisie arbitrairement, et alors la fonction K en résulte par une quadrature, à une constante près : bien entendu, si l'on est obligé dans ce calcul de se servir des formules qui expriment M, ..., M′, ... en fonction de t, soit $M = mt + \mu$, ..., on doit ensuite faire disparaître μ, ..., à l'aide des mêmes formules, de façon que K soit exprimée, comme toutes les autres fonctions considérées ici, à l'aide de u, v, ..., c'est-à-dire t, M, N, ..., M′, N′, ..., a, b, ..., a', b', ...

Prenons pour G une fonction des seules constantes a, b, ..., a', b', ...; la formule (10) donne en particulier

$$\frac{dJ_M}{dt} = 0, \qquad \frac{dJ_a}{dt} = \frac{\partial G}{\partial a} - \sum \frac{\partial m}{\partial a} J_M;$$

on en conclut immédiatement que les quantités J_M, J_N, ... sont encore des constantes, tandis que les quantités J_a, J_b, ... sont des fonctions linéaires du temps, à coefficients constants.

En faisant $u = t$, et remplaçant J_t par son expression ci-dessus, on a encore, puisque G et les J_M sont des constantes,

$$\frac{d}{dt}\left(F - \sum m' J_{M'}\right) = \frac{\delta F}{\delta t}; \tag{11}$$

si donc la fonction F, sous sa forme primitive, ne contient pas t explicitement, c'est-à-dire ne dépend du temps que par l'intermédiaire des arguments M′, N′, ..., la fonction $F - \sum m' J_{M'}$, exprimée à l'aide de u, v, ..., est une constante.

3° Faisons les hypothèses suivantes, toujours réalisées dans les problèmes de la Mécanique céleste : les expressions des x_i, y_i, ainsi que celle de F, à l'aide de u, v, ..., se présentent comme des séries à coefficients fonctions de a, b, ..., a', b', ..., procédant suivant les puissances entières non négatives de t, et suivant les puissances entières quelconques des quantités e^{iM}, e^{iN}, ..., $e^{iM'}$, $e^{iN'}$, ..., en désignant comme d'habitude par e la base des logarithmes hyperboliques, et par i l'imaginaire $\sqrt{-1}$; en d'autres termes, si l'on préfère cette forme, ces séries procèdent suivant les puissances de t, et linéairement suivant les cosinus et sinus des sommes des multiples des arguments M, N, ..., M′, N′, ..., et sont alors réelles. De plus, les valeurs des x_i peuvent contenir en outre des termes linéaires à coefficients purement numériques par rapport aux arguments M, N, ..., M′, N′, ... eux-mêmes.

Nous appellerons séries *mixtes* les séries dont nous venons de définir la nature, et, en particulier, séries *périodiques* celles qui ne contiennent pas explicitement le temps t en dehors des arguments.

Nous admettrons que si deux séries mixtes sont égales pour toute valeur de t, elles sont identiques, c'est-à-dire composées des mêmes termes, sous la condition essentielle que les arguments des différents

termes de chacune d'elles pris sous la forme exponentielle, sont tous distincts; ceci veut dire que deux quelconques de ces arguments ne peuvent avoir une différence constante, et, par suite, qu'il n'existe aucune relation linéaire et homogène à coefficients entiers entre les diverses quantités m, n, ..., m', n', ..., toutes différentes de zéro, par conséquent. Pour le sens et la valeur que l'on doit attacher pratiquement à cette proposition, nous renverrons aux *Leçons de Mécanique céleste* de H. Poincaré, t. I, n° 107.

La fonction primitive et la dérivée complète par rapport au temps d'une série mixte étant de la même nature, comme aussi sa dérivée partielle par rapport à l'une quelconque des variables u, v, ..., et encore le produit de deux telles séries, on voit que les fonctions K et J_u sont toutes des séries mixtes; et si l'on fait, en ordonnant suivant les puissances de t,

$$x_i = x_i^0 + x_i' t + \ldots, \qquad y_i = y_i^0 + y_i' t + \ldots,$$
$$K = K^0 + K' t + \ldots, \qquad J_u = J_u^0 + J_u' t + \ldots,$$

on a évidemment, en excluant le cas de $u = t$,

$$J_u^0 = \frac{\partial K^0}{\partial u} + \sum y_i^0 \frac{\partial x_i^0}{\partial u}.$$

Or nous savons par ce qui précède que les quantités J_M sont des constantes, tandis que les J_a sont des fonctions linéaires de t à coefficients constants : il faut en conclure en particulier que les séries périodiques telles que J_M^0 et J_a^0 se réduisent toutes à des constantes qui ne dépendent que de a, b, ..., a', b', ..., et que l'on peut calculer sans connaître K^0 autrement que par son terme constant, qui est arbitraire, et que nous prendrons nul.

Imaginons alors que l'on fasse dans les équations (1) le changement de variables qui consiste à remplacer les x_i, y_i par les quantités M, N, ..., a, b, ..., que nous désignerons dans leur ensemble par z_k, en établissant entre les nouvelles et les anciennes variables les relations $x_i = x_i^0$, $y_i = y_i^0$. En prenant K^0 pour la fonction K relative à cette substitution, les J_{z_k} sont des constantes, d'après ce qui précède, et en désignant généralement par f_0 la partie constante d'une fonction périodique quelconque f, on a

$$J_{z_k} = \left(\sum_i y_i^0 \frac{\partial x_i^0}{\partial z_k} \right)_0.$$

Quant à la fonction J_t, nécessaire pour former les équations (4) du numéro précédent, il ne faut pas la confondre avec celle qui est désignée ici de la même façon; mais elle est manifestement égale à $\sum m' J^0_{M'}$, puisque x_i^0, y_i^0, considérées comme fonctions des z_k et de t, dépendent de t par l'intermédiaire des arguments M', ..., et seulement de cette façon. En appelant encore H^0 ce que devient H quand on y remplace x_i, y_i, par x_i^0, y_i^0, les équations (4) qui correspondent au changement de variables envisagé sont donc

$$\frac{\partial\left(H^0 - \sum m' J^0_{M'}\right)}{\partial z_k} + \sum_l \left(\frac{\partial J_{z_k}}{\partial z_l} - \frac{\partial J_{z_l}}{\partial z_k}\right) \frac{dz_l}{dt} = 0.$$

Pour calculer $\sum m' J^0_{M'}$, on peut s'aider de la relation (11); si en particulier la fonction F, sous sa forme primitive, ne contient pas t explicitement, il est clair que la quantité $F - \sum m' J_{M'}$ étant constante, il en est de même de $F^0 - \sum m' J^0_{M'}$; en appelant J cette constante, égale à $F^0_0 - \sum m' \left(\sum_i y_i^0 \frac{\partial x_i^0}{\partial M'}\right)_0$, la fonction $H^0 - \sum m' J^0_{M'}$ qui figure dans les équations précédentes devient $H^0 - F^0 + J$.

Si l'on fait alors en particulier $H = F$, de sorte que cette fonction se réduise à la constante J, et si la solution des nouvelles équations (4) se présente sous forme périodique, on aura réussi de cette manière à mettre la solution des équations (7) sous la même forme, en y faisant disparaître les termes qui dépendent explicitement de t. C'est une autre façon d'envisager la méthode de la variation des constantes, pour résoudre une question étudiée par Laplace.

4° Plaçons-nous dans le cas spécialement important où les valeurs des x_i, y_i, comme les expressions de F et des dérivées $\frac{\delta F}{\delta u}$ ne contiennent pas le temps explicitement en dehors des arguments M, ..., M', ..., c'est-à-dire sont périodiques; exception faite pour les x_i, qui peuvent toujours renfermer des termes linéaires à coefficients purement numériques par rapport à ces arguments.

Choisissons alors pour G le terme constant de la fonction périodique $\sum y_i \frac{dx_i}{dt} - F$, de façon que la dérivée $\frac{dK}{dt}$ étant privée de terme

constant, la fonction K soit elle-même périodique; en outre, nous prenons nulle comme ci-dessus la partie constante de K, qui est arbitraire.

Dans ces conditions, la fonction J_t est nulle d'après sa définition même, et par suite la relation (10) montre qu'il en est de même de $\frac{\delta F}{\delta t}$, de sorte que F, sous sa forme primitive, ne saurait contenir le temps explicitement, ce qui était évident *a priori*.

Les autres fonctions J_u sont toutes périodiques; par suite, comme ci-dessus, les J_M et les J_a sont des constantes, égales à $\left(\sum_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial u}\right)_0$ pour $u = M$, $u = a$.

D'après la définition de G et la relation $J_t = 0$, on a

$$F - \sum m' J_{M'} = \sum m J_M - G,$$

de sorte que le premier membre de cette équation est constant, comme le montre encore la relation (11). Si J désigne cette constante, on a aussi

$$J = F_0 - \sum m' (J_{M'})_0,$$

avec

$$(J_{M'})_0 = \sum_i \left(y_i \frac{\partial x_i}{\partial M'}\right)_0.$$

Mais il y a plus : les deux membres de la formule générale (10) sont des fonctions périodiques, et comme le premier est évidemment privé de terme constant, puisque c'est une dérivée complète par rapport au temps d'une fonction périodique, il en est de même du second. Il en résulte, en prenant successivement M', a, a' pour u,

$$\left(\frac{\delta F}{\delta M'}\right)_0 = 0$$

et

$$(12) \qquad \frac{\partial G}{\partial a} = \sum \frac{\partial m}{\partial a} J_M, \qquad \frac{\partial G}{\partial a'} = \sum \frac{\partial m}{\partial a'} J_M + \sum \frac{\partial m'}{\partial a'} (J_{M'})_0 - \left(\frac{\delta F}{\delta a'}\right)_0.$$

Les fonctions G, J_M $J_{M'}$, m, m' dépendent des constantes a, b, ..., a', b', ...; en formant la différentielle totale dG par les formules

précédentes, on a

$$dG = \sum J_M \, dm + \sum \left[\sum \frac{dm'}{da} (J_{M'})_0 - \left(\frac{\partial F}{\partial a} \right)_0 \right] da;$$

par suite, on peut exprimer G à l'aide des m, n, ..., a, b, ..., et il en est de même de ses dérivées partielles par rapport à ces quantités, soit

$$\frac{\partial G}{\partial m} = J_M, \qquad \frac{\partial G}{\partial a} = \sum \frac{dm'}{da} (J_{M'})_0 - \left(\frac{\partial F}{\partial a} \right)_0. \tag{13}$$

On peut écrire aussi, en introduisant la fonction J égale à $\sum m J_M - G$ $\left(\text{ou } F - \sum m' J_{M'}\right)$,

$$dJ = \sum m \, dJ_M + \sum \left[\left(\frac{\partial F}{\partial a} \right)_0 - \sum \frac{dm'}{da} (J_{M'})_0 \right] da,$$

de sorte qu'il est possible d'exprimer J à l'aide des J_M et des a; il en est de même de ses dérivées partielles par rapport à ces quantités, soit

$$\frac{\partial J}{\partial J_M} = m, \qquad \frac{\partial J}{\partial a} = \left(\frac{\partial F}{\partial a} \right)_0 - \sum \frac{dm'}{da} (J_{M'})_0. \tag{14}$$

Si en particulier il n'y a pas d'arguments M', l'intégrale des forces vives a lieu, et l'on a simplement J = F.

Les équations (12), (13), (14) expriment des théorèmes importants, dont nous aurons à faire usage plusieurs fois.

Si l'on veut finalement mettre la solution générale des équations (1) sous la même forme que celle des équations (7), en prenant comme nouvelles variables les quantités M, N, ..., a, b, ..., on aura comme ci-dessus les équations

$$\frac{\partial (H - F + J)}{\partial s_k} + \sum_l \left(\frac{\partial J_{s_k}}{\partial s_l} - \frac{\partial J_{s_l}}{\partial s_k} \right) \frac{ds_l}{dt} = 0; \tag{15}$$

en vertu de ce qui précède, ces équations offrent des particularités intéressantes, surtout si la nature des J_s permet d'appliquer les considérations développées au n° 10 : c'est ce que nous mettrons en évidence à l'occasion de chaque problème particulier traité, sans insister actuellement davantage.

5° Nous aurons encore à faire usage des considérations suivantes.

Revenant au changement de variables du n° 9, supposons que les x_i, y_i dépendent du temps t non seulement explicitement et par les z_k, mais encore par l'intermédiaire d'une quantité p, qui est une fonction connue de t. Il faut, dans ces conditions, remplacer $\frac{dx_i}{dt}$ par exemple par $\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial p}\frac{dp}{dt}$, et, par suite, il faut augmenter $\frac{\partial H}{\partial z_k}$ dans les équations (2) de la quantité $[z_k, p]\frac{dp}{dt}$.

Imaginons alors qu'on veuille mettre la solution générale des équations (1) sous la même forme que la solution générale des équations (7), en regardant non seulement $c_1, c_2, \ldots$ comme des fonctions convenablement choisies de t, ainsi que nous l'avons fait ci-dessus, mais aussi le paramètre α_1, par exemple, comme une fonction connue de t; il faudra, dans les équations générales qui terminent la première section de ce numéro, augmenter $\frac{\partial H}{\partial c_k}$ de $\left(\frac{\partial J_{c_k}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial J_{\alpha_1}}{\partial c_k}\right)\frac{d\alpha_1}{dt}$, et en même temps mettre partout pour α_1 sa nouvelle valeur.

Reprenons enfin toutes les hypothèses des sections 2°, 3°, 4°, et supposons d'abord que α_1 soit le paramètre μ' par exemple, qui figure dans l'argument M'; il faudra, dans les équations (15), augmenter $\frac{\partial H}{\partial z_k}$ de $-\frac{\partial J_{M'}}{\partial z_k}\frac{d\mu'}{dt}$, puisque $J_{\mu'}$ est une constante; on a d'ailleurs, d'après la formule (10),

$$\frac{dJ_{M'}}{dt} = \frac{\delta F}{\delta M'},$$

ce qui détermine $J_{M'}$, à la constante près $(J_{M'})_0$.

Supposons en second lieu que α_1 soit le paramètre a'; en tenant compte du fait que les m' dépendent de a', et de ce que nous venons de dire, il faudra augmenter $\frac{\partial H}{\partial z_k}$ dans les équations (15) de

$$\left(\frac{\partial J_{z_k}}{\partial a'} - \frac{\partial J_{a'}}{\partial z_k} - \sum \frac{\partial m'}{\partial a'}\frac{\partial J_{M'}}{\partial z_k}\right)\frac{da'}{dt}.$$

On a d'ailleurs, d'après (10) et (12),

$$\frac{dJ_{a'}}{dt} = \frac{\delta F}{\delta a'} - \left(\frac{\delta F}{\delta a'}\right)_0 - \sum \frac{\partial m'}{\partial a'}[J_{M'} - (J_{M'})_0],$$

ce qui détermine $J_{a'}$ à sa partie constante près, égale à $\left(\sum_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial a'}\right)_0$.

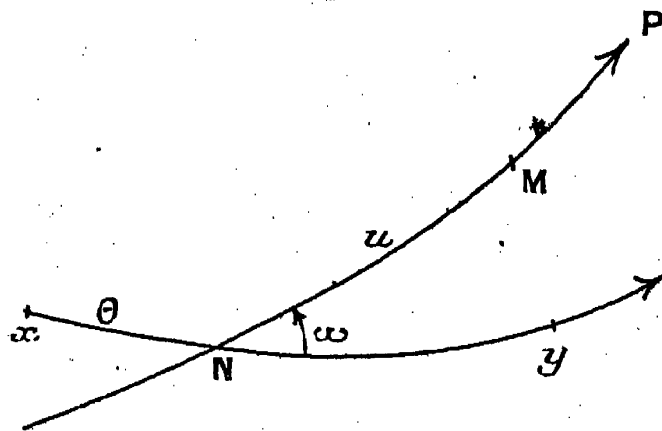
CHAPITRE III.

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL.

12. Reprenons les équations du mouvement d'un point matériel, avec les notations qui nous ont servi au n° 8.

D'après le Chapitre I, la fonction de forces U, dans les problèmes que nous avons à traiter, contient toujours un terme d'une importance prépondérante, de la forme $\frac{k^2}{r}$, en appelant r le rayon vecteur du point M, c'est-à-dire sa distance à l'origine O des coordonnées, et désignant par k^2 une constante. Si ce terme existait seul, on sait que la trajectoire de M serait plane; tenant compte de ce fait, nous allons faire un premier changement de variables destiné à mettre en évidence le rôle particulier du plan P qui contient à chaque instant le point O, le point M et la vitesse V de M. Ce plan, qui serait fixe si U se réduisait à $\frac{k^2}{r}$, peut être appelé « le plan de l'orbite instantanée de M ».

Sur une sphère de centre O passant par M (*fig.* 1) et supposée

Fig. 1.

comme nous le ferons toujours vue extérieurement, le plan P a pour trace un grand cercle, qui sera orienté dans un sens déterminé; son pôle p en résulte sans ambiguïté par la condition que P soit orienté

par rapport à p dans le même sens que xy par rapport à z, c'est-à-dire dans le sens direct, qui sera toujours, sauf avis contraire, le sens des trièdres de coordonnées que nous envisagerons.

Le plan Oxy est d'ailleurs ordinairement celui de l'écliptique à une certaine date, et l'on conserve d'une façon générale toutes les façons de parler correspondantes. Si N est l'un des *nœuds* de P sur xy, l'arc xN est la *longitude* θ de ce nœud, et l'angle ω, compté dans le sens direct, que fait en N le grand cercle xy avec le grand cercle P, est l'*inclinaison* de P sur xy. Les éléments θ et ω déterminent complètement la position et l'orientation de P. Sauf exception spécifiée explicitement, on oriente P dans le sens du mouvement de M, et l'on choisit pour N le nœud ascendant de P; en traversant ce nœud, le point M entre dans l'hémisphère limité par xy qui contient z.

Connaissant θ et ω, la position du point M est déterminée par l'arc $NM = u$, compté dans le sens de l'orientation de P et dit *argument de la latitude* de M, et enfin par son rayon vecteur OM. Par suite les coordonnées x, y, z s'expriment à l'aide de r, u, θ, ω; et la fonction U dépend des mêmes quantités et de t. Il est inutile pour l'instant de fixer les deux autres variables qu'il faut joindre à r, u, θ, ω pour achever la transformation des variables primitives x, y, z, x', y', z'.

D'après ce que nous avons dit au n° 10, on doit, pour effectuer le changement de variables, calculer les quantités

$$J_\alpha = x'\frac{\partial x}{\partial \alpha} + y'\frac{\partial y}{\partial \alpha} + z'\frac{\partial z}{\partial \alpha},$$

en désignant par α l'une quelconque des nouvelles variables : on a pris ici $K = 0$.

Si α est l'une des variables non encore définies, on a $J_\alpha = 0$, puisque x, y, z n'en dépendent pas.

Si α est l'une des variables r, u, θ, ω, il est clair que J_α n'est autre chose que le produit géométrique des deux vecteurs V et V_α, en désignant par V la vitesse réelle de M, par V_α la vitesse virtuelle que prend M quand on fait varier uniquement α, et cela de façon que $\delta\alpha = \delta t$, en employant les notations habituelles.

Les valeurs de J_α découlent immédiatement de cette remarque. Si d'abord ω varie seul, il en résulte pour M une rotation autour de ON, et la vitesse V_ω est le moment par rapport à M d'un vecteur

unité porté par ON : ce moment est perpendiculaire au plan OMN ou P, et par suite à la vitesse V qui est contenue par hypothèse dans ce plan, de sorte que l'on a $J_\omega = 0$.

La vitesse V_r est un vecteur égal à l'unité porté par OM, de sorte que J_r est la projection de V sur OM, c'est-à-dire la vitesse radiale de M, égale à la dérivée r' de r par rapport au temps.

La vitesse V_u est due à une rotation autour de Op, et est égale au moment par rapport à M d'un vecteur unité porté par Op : elle est donc égale à r, et dirigée suivant la perpendiculaire à OM menée dans le plan P par M, dans le sens direct par rapport à Op; son produit géométrique par V, c'est-à-dire J_u, est par suite le moment h de la vitesse V par rapport à l'axe Op.

Enfin la vitesse V_θ est due à une rotation autour de Oz, et est égale au moment par rapport à M d'un vecteur unité porté par Oz. Ce vecteur peut être décomposé en deux autres : l'un, égal à $\cos\omega$, est dirigé suivant Op; l'autre, égal à $\sin\omega$, est situé dans le plan P. Le moment de ce dernier par rapport à M est perpendiculaire au plan P, de sorte que son produit géométrique par V est nul : on doit se borner à considérer le moment du vecteur $\cos\omega$ dirigé suivant Op, et, d'après ce qui a été dit relativement à J_u, on a $J_\theta = h'$, en appelant h' la quantité $h\cos\omega$.

Ceci nous montre, d'après le n° 10, qu'en associant aux variables r, u, θ les quantités r', h, h', on obtient un nouveau système d'équations canoniques pour déterminer ces nouvelles variables. Il n'y a d'ailleurs pas lieu de conserver l'argument de la latitude u, mais il est préférable d'introduire à sa place la *longitude dans l'orbite*, v, égale à $u+\theta$: d'après le n° 10, toujours, on n'altérera pas la forme canonique si, en même temps, on remplace la variable h' par $h'-h$, soit

$$h_1 = h(\cos\omega - 1).$$

Il faut encore savoir ce que devient la fonction $H = T - U$ quand on l'exprime à l'aide des nouvelles variables. La force vive $2T$, c'est-à-dire le carré de la vitesse de M, est d'abord manifestement égale à $r'^2 + \frac{h^2}{r^2}$; quant à la fonction de forces U, qui ne dépend que des coordonnées x, y, z, et de t, elle devient en premier lieu une fonction de r, v, θ, ω, t, et finalement de r, v, θ, $\frac{h_1}{h}$, t, puisque l'inclinaison ω est liée numériquement à $\frac{h_1}{h}$.

En résumé, on a les équations

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial r'}, \qquad \frac{dr'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r},\\
&\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial h}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi},\\
&\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial h_1}, \qquad \frac{dh_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta},\\
&\qquad H = \frac{1}{2}\left(r'^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - U,\\
&\qquad U = f\left(r, \varphi, \theta, \frac{h_1}{h}, t\right).
\end{aligned}
\right.
$$

13. Comme nous l'avons fait remarquer, nous pouvons écrire la fonction de forces U sous la forme $\frac{k^2}{r} + V$, en mettant en évidence son terme principal $\frac{k^2}{r}$: la fonction V est dite alors *perturbatrice*, car c'est son influence qui trouble le mouvement plus simple que l'on obtiendrait en ne tenant compte que du premier terme de U.

Il est clair, dans ces conditions, que nous trouverons avantage à prendre pour nouvelles variables les constantes arbitraires qui figurent dans la solution de ce problème plus simple : en effet, puisque ces quantités restent constantes dans une première approximation que l'on obtient en négligeant la fonction perturbatrice V, on doit penser qu'elles varieront peu quand on tiendra compte ensuite de cette fonction pour arriver à la solution exacte. On peut d'ailleurs aussi bien substituer à ces constantes d'autres quantités équivalentes, convenablement choisies.

Le mouvement, qui correspond à l'hypothèse où l'on réduit U à son premier terme $\frac{k^2}{r}$, est le mouvement *képlérien*, c'est-à-dire celui d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance. C'est celui que nous devons tout d'abord étudier. Il faut donc intégrer les équations (1) quand on y remplace H par

$$F = \frac{1}{2}\left(r'^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - \frac{k^2}{r}.$$

On voit en premier lieu que h, θ et h_1 sont alors des constantes, puisque F ne dépend aucunement des variables conjuguées ; le mouvement se fait donc dans un plan fixe P, déterminé par θ et h_1, ou

bien par θ et l'inclinaison ω; et l'intégrale des aires a lieu dans ce plan.

On voit en outre que la fonction F est elle-même une constante, puisqu'elle ne dépend du temps que par l'intermédiaire de r et r' : c'est l'application du théorème des forces vives.

A la place de F et h, nous emploierons encore deux constantes positives équivalentes, p et ε, telles que

$$h = k\sqrt{p}, \qquad F = -\frac{k^2}{2p}(1-\varepsilon^2);$$

la constante des aires h est généralement positive, c'est-à-dire que le plan P est orienté dans le sens du mouvement; mais on peut aussi bien la supposer négative, et ceci revient simplement à prendre k négativement.

Les équations qui déterminent r et v sont alors

$$r'^2 = \frac{dr^2}{dt^2} = -\frac{k^2}{p}(1-\varepsilon^2) + 2\frac{k^2}{r} - \frac{k^2 p}{r^2},$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{p}}{r^2};$$

l'équation de la trajectoire est donc, en éliminant dt,

$$\left[\frac{d\left(\frac{p}{r}\right)}{dv}\right]^2 + (1-\varepsilon^2) - 2\frac{p}{r} + \left(\frac{p}{r}\right)^2 = 0;$$

différentiant, on a

$$\frac{d^2\left(\frac{p}{r}\right)}{dv^2} + \frac{p}{r} = 1,$$

de sorte que $\frac{p}{r}$ est certainement de la forme $1 + \alpha\cos(v - \varpi)$, ϖ étant une constante arbitraire, et α étant une constante positive que l'on détermine en écrivant que l'équation du premier ordre est vérifiée, ce qui donne $\alpha = \varepsilon$. Donc

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos(v - \varpi).$$

La trajectoire est par suite une section conique de paramètre p et d'excentricité ε, ayant son foyer en O; si A est le sommet situé sur l'axe focal et le plus voisin de O, ce sommet sera le *périhélie* quand

on suppose que O est le Soleil, et cette façon de parler, que nous conserverons généralement, sera modifiée suivant le cas, lorsque nous prendrons pour O un astre déterminé différent. La constante d'intégration ϖ est la longitude dans l'orbite pour le point A, c'est-à-dire la *longitude du périhélie;* l'angle $v - \varpi$ est l'*anomalie vraie* w du point M.

Si l'on introduit encore une constante a telle que

$$p = a(1 - \varepsilon^2),$$

cette constante est le demi-grand axe de l'ellipse trajectoire, si l'on a $\varepsilon < 1$; quand au contraire $\varepsilon > 1$, a est le demi-axe transverse, pris négativement, de l'hyperbole dont la branche concave vers O est la trajectoire de M; dans le cas de la parabole, on a $\varepsilon = 1$, et la constante a devient infinie.

Il faut maintenant déterminer le temps par l'équation des aires

$$r^2 \frac{dv}{dt} = k\sqrt{p};$$

mais nous nous bornerons ici au cas du mouvement elliptique. Si ξ et η sont les coordonnées rectangulaires qui correspondent aux coordonnées polaires r et w, l'équation de l'ellipse trajectoire est

$$\frac{(\xi + a\varepsilon)^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)} = 1,$$

et par suite on peut poser

$$\xi = r\cos w = a(\cos u - \varepsilon),$$
$$\eta = r\sin w = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}\sin u,$$

u étant une nouvelle variable auxiliaire : c'est l'*anomalie excentrique* dont l'interprétation géométrique est évidente d'après ces formules mêmes. On a alors

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} = a^2\sqrt{1 - \varepsilon^2}(1 - \varepsilon\cos u)\frac{du}{dt};$$

faisant donc encore

$$n = \frac{k\sqrt{p}}{a^2\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = k a^{-\frac{3}{2}},$$

on a immédiatement

$$u - \varepsilon \sin u = n(t - t_0),$$

en désignant par t_0 une nouvelle et dernière constante d'intégration. Cette équation est l'*équation de Képler*, qui relie le temps à l'anomalie excentrique.

La constante t_0 est l'époque d'un passage au périhélie, puisque pour $t = t_0$, on a $u = 0$, et par suite $w = 0$, $r = a(1 - \varepsilon)$; n est le *moyen mouvement* de M; $n(t - t_0)$ en est l'*anomalie moyenne* g. La quantité $g + \varpi$ est la *longitude moyenne* l du point M; et si l_0 est sa valeur à l'origine du temps, c'est-à-dire la *longitude moyenne de l'époque*, on substitue la constante l_0 à t_0, de sorte que l'équation de Képler prend la forme

$$u - \varepsilon \sin u = g = l - \varpi = nt + l_0 - \varpi.$$

Les *éléments* du mouvement képlérien elliptique sont, suivant les usages astronomiques, les six constantes d'intégration θ, ω, ϖ, ε, l_0, a, et l'on y joint le moyen mouvement n lié à a par la relation $n = ka^{-\frac{3}{2}}$; souvent aussi on se sert simultanément du paramètre p égal à $a(1 - \varepsilon^2)$; de même on peut remplacer l_0 par l'anomalie moyenne de l'époque g_0, égale à $l_0 - \varpi$. Dans le cas des comètes à orbites fortement excentriques, on remplace d'habitude a par la *distance périhélie* q, égale à $a(1 - \varepsilon)$, ou encore à $\frac{p}{1 + \varepsilon}$; en même temps on prend à la place de l_0 l'époque t_0 d'un passage au périhélie, et l'on a $l_0 + nt_0 = \varpi$.

Les constantes introduites dès le début par l'intégration sont au lieu de ω, ε et a :

$$h = k\sqrt{a(1 - \varepsilon^2)}, \qquad h_1 = h(\cos\omega - 1), \qquad F = -\frac{k^2}{2a}.$$

Pour compléter les notions essentielles relatives au mouvement elliptique, il nous suffira de faire actuellement les observations suivantes.

Les trois anomalies, moyenne, excentrique et vraie, g, u, w, varient manifestement toutes les trois dans le même sens, quand on les compte d'une façon continue, c'est-à-dire sans jamais les altérer d'un multiple de 2π; par suite, chacune d'elles détermine sans ambiguïté les deux autres. Pour $t = t_0$, on a $g = u = 0$, et l'on peut prendre $w = 0$: alors les trois anomalies sont de nouveau égales chaque fois que le point M passera au périhélie, ou bien au sommet opposé de l'ellipse, appelé *aphélie*, leur valeur commune étant un

multiple pair ou impair de π suivant que l'on sera dans le premier ou dans le second cas; et, en général, elles seront toujours comprises dans la même demi-circonférence.

Le mouvement est périodique, et symétrique par rapport à la *ligne des apsides* OA. Au point de vue du calcul, on peut toujours réduire les trois anomalies à être comprises entre $-\pi$ et $+\pi$; et quand elles sont positives, on a alors $w > u > g$: la seconde de ces inégalités résulte immédiatement de l'équation de Képler, et la première sera rendue évidente par l'une des formules que nous allons établir maintenant.

Reprenons les relations qui nous ont servi à introduire u, soit

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{r}{a}\sin w = \sqrt{1-\varepsilon^2}\sin u,\\ &\frac{r}{a}\cos w = \cos u - \varepsilon;\end{aligned}\right.$$

élevant au carré et ajoutant, on en déduit d'abord

$$(a')\qquad \frac{r}{a} = 1 - \varepsilon\cos u,$$

sans ambiguïté possible, puisque les quantités $\frac{r}{a}$ et $1 - \varepsilon\cos u$ sont positives toutes deux.

Écrivant alors

$$\frac{r}{a}\left(\cos^2\frac{w}{2} + \sin^2\frac{w}{2}\right) = 1 - \varepsilon\cos u,$$

$$\frac{r}{a}\left(\cos^2\frac{w}{2} - \sin^2\frac{w}{2}\right) = \cos u - \varepsilon,$$

on en déduit, sans ambiguïté encore, d'après les remarques faites ci-dessus,

$$(b)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{\frac{r}{a}}\sin\frac{w}{2} = \sqrt{1+\varepsilon}\sin\frac{u}{2},\\ &\sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{w}{2} = \sqrt{1-\varepsilon}\cos\frac{u}{2},\end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire en particulier la formule

$$(b')\qquad \tang\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon}}\tang\frac{u}{2},$$

qui justifie l'inégalité $w > u$, lorsque ces deux angles sont compris entre o et π

Les premières formules donnent encore

$$\frac{a}{r}\sin u = \frac{\sin w}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$
$$\frac{a}{r}\cos u = \cos w + \frac{a\varepsilon}{r};$$

remplaçant dans le second membre de cette dernière égalité $\frac{a}{r}$ par sa valeur

$$(c') \qquad \frac{a}{r} = \frac{1+\varepsilon\cos w}{1-\varepsilon^2},$$

on peut écrire finalement

$$(c) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{a}{r}\sin u &= \frac{\sin w}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \\ \frac{a}{r}\cos u &= \frac{\cos w + \varepsilon}{1-\varepsilon^2}. \end{aligned} \right.$$

Les formules des trois groupes (a), (a'), (b), (b'), (c), (c') seront utilisées tour à tour, suivant les circonstances.

Dans un autre ordre d'idées, il résulte de la nature du mouvement que $\frac{a}{r}$ est une fonction périodique paire de l'anomalie moyenne g, la période étant 2π : cette quantité est donc développable en série de Fourier suivant les cosinus des multiples de g. De même $\frac{r'}{an}$ et la différence $w - g$, dite *équation du centre*, sont des fonctions périodiques impaires développables suivant les sinus des multiples de g. L'emploi de ces diverses séries, dont les coefficients dépendent de la seule excentricité ε, ne peut présenter aucune difficulté analytique.

14. Transformons maintenant les équations (1) comme nous avons dit au début du numéro précédent, en prenant comme nouvelles variables les éléments du mouvement elliptique, soit par exemple, g_0, ϖ, θ, a, ε, h_1 ; ou plutôt, puisque g_0 ne figure dans les formules que comme partie intégrante de g, nous remplacerons la nouvelle variable g_0 par l'anomalie moyenne g, qui est un argument linéaire par rapport au temps, $nt + g_0$, le moyen mouvement n étant lié à a par la relation $n^2a^3 = k^2$. Comme θ et h_1 forment un couple nette-

ment séparé de variables, il n'y a d'ailleurs lieu que de substituer g, ϖ, a, ε à r, φ r', h dans les quatre premières des équations (1), en conservant les deux autres.

D'après ce qui précède, dans le mouvement elliptique, h est une constante, tandis que r, r', et la différence $\varphi - g - \varpi$ sont des fonctions périodiques de g; nous pouvons donc appliquer directement tout ce que nous avons dit au n° 11 (4°), en prenant r, φ pour les variables x_i, puis r', h pour les y_i; les arguments M, N, ... se réduisent à g, les arguments M', N', ... n'existent pas, et il y a un seul paramètre a', soit k.

La fonction K étant choisie comme nous l'avons vu, sans qu'il soit aucunement nécessaire de la déterminer effectivement, et u désignant l'une quelconque des nouvelles variables, on a

$$J_u = \left(r' \frac{\partial r}{\partial u} + h \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)_0;$$

si l'on fait $u = a$ ou $u = \varepsilon$, il résulte de ce que nous avons dit à la fin du numéro précédent que la somme $r' \frac{\partial \varphi}{\partial u} + h \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ est une fonction périodique impaire de g, et par suite on a d'abord

$$J_a = 0, \qquad J_\varepsilon = 0.$$

On a ensuite

$$J_\varpi = h,$$

puisque ϖ n'entre que comme constante additive dans l'expression de φ.

De plus, nous savons que la quantité J_g s'exprime à l'aide du seul moyen mouvement n et de a', de sorte qu'on peut la calculer en supposant nulle l'excentricité ε; mais alors on a

$$r = a, \qquad \varphi = g + \varpi, \qquad h = k\sqrt{a},$$

et par suite, il vient immédiatement

$$J_g = k\sqrt{a}.$$

Enfin la constante J est égale à F, soit $-\frac{k^2}{2a}$.

Exprimant F à l'aide de J_g et de k, on a donc encore

$$F = -\frac{k^4}{2J_g^2},$$

de sorte que, d'après les formules (14) du n° 11,

$$\frac{\partial F}{\partial J_g} = \frac{k^4}{J_g^3} = n, \qquad \frac{\partial F}{\partial k} = -\frac{2k^3}{J_g^2} = \left(\frac{\delta F}{\delta k}\right)_0;$$

la première de ces relations se vérifie d'elle-même, bien entendu; quant à la seconde, en remarquant que $\frac{\delta F}{\delta k} = -\frac{2k}{r}$, elle nous apprend que le terme constant du développement en série de Fourier de $\frac{1}{r}$ a pour valeur $\frac{k^2}{J_g^2}$, c'est-à-dire $\frac{1}{a}$. Ce résultat n'est qu'accessoire en ce moment; il permettra de vérifier toutes les autres propositions contenues dans les formules (12) et (13) du n° 11, la fonction G étant égale à $\frac{3}{2}\frac{k^2}{a}$.

D'après le n° 10, nous voyons finalement qu'en prenant comme variables g, ϖ, θ, d'une part, J_g, J_ϖ, h_1, d'autre part, on réalise un changement de variables complètement canonique dans les équations (1); et l'on arrive encore au même résultat en remplaçant g par la longitude moyenne l, égale à $g+\varpi$ à la condition de remplacer en même temps J_ϖ par $J_\varpi - J_g$, conformément à l'observation finale de ce même numéro. En posant donc

$$A = J_g = k\sqrt{a} = na^2,$$

$$B = J_\varpi - J_g = h - k\sqrt{a} = A(\sqrt{1-e^2} - 1),$$
$$C = h_1 = h(\cos\omega - 1) = (A + B)(\cos\omega - 1),$$

on a les nouvelles équations définitives

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial A}, & \frac{dA}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial l}, \\ \frac{d\varpi}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial B}, & \frac{dB}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \varpi}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial C}, & \frac{dC}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta}. \end{aligned}\right.$$

Pour mettre en évidence la fonction perturbatrice V, il suffit de remplacer H par F — V, ce qui donne encore, d'après ce qui

précède,

$$
(3)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\Lambda}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= n - \frac{\partial V}{\partial \Lambda},\\
\frac{dB}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial \varpi}, & \frac{d\varpi}{dt} &= \quad - \frac{\partial V}{\partial B},\\
\frac{dC}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial \theta}, & \frac{d\theta}{dt} &= \quad - \frac{\partial V}{\partial C},
\end{aligned}
\right.
$$

sous une forme quasi canonique, avec

$$n = \frac{k^4}{\Lambda^3} = -\frac{\partial}{\partial \Lambda}\left(\frac{k^4}{2\Lambda^2}\right).$$

On peut ensuite, si l'on veut, et suivant les circonstances, choisir d'autres variables se prêtant mieux au calcul.

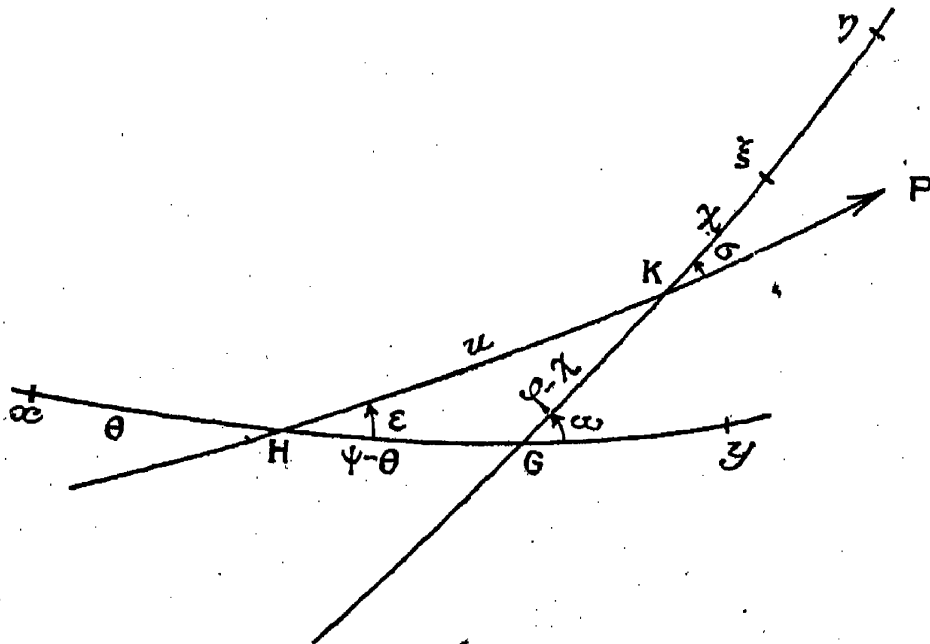
CHAPITRE IV.

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE.

---

15. Nous avons vu dans le Chapitre précédent comment se transforme le premier des problèmes fondamentaux de la Mécanique céleste, celui du mouvement d'un point matériel, lorsqu'on met en évidence la partie principale de la fonction de forces. Nous allons dès maintenant faire de même pour le second problème, celui du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Reprenons les notations du n° 8, en les précisant d'abord sur une figure sphérique de centre O (*fig.* 2). Si G est l'un des nœuds de $\xi\eta$

Fig. 2.

sur xy, ψ sera la longitude xG de ce nœud, et ω sera l'inclinaison de $\xi\eta$ sur xy en G; φ sera l'arc Gξ.

A la place des variables canoniques φ, ψ, ω, φ_1, ψ_1, ω_1, utilisées précédemment, adoptons d'autres variables, dont nous désignerons pour l'instant l'une quelconque par α. Pour faire le changement, il

faudra calculer, en prenant $K = 0$, les quantités

$$J_\alpha = \varphi_1 \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \psi_1 \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \omega_1 \frac{\partial\omega}{\partial\alpha},$$

c'est-à-dire, d'après la définition de φ_1, ψ_1, ω_1,

$$J_\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial T}{\partial\varphi'} + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\frac{\partial T}{\partial\psi'} + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial T}{\partial\omega'};$$

T étant une forme quadratique homogène de φ', ψ', ω', nous voyons donc que J_α en est la *forme polaire* par rapport aux quantités φ'_α, ψ'_α, ω'_α, en désignant ainsi les dérivées $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}$. Or, φ'_α, ψ'_α, ω'_α sont les vitesses virtuelles de φ, ψ, ω dans le mouvement virtuel du corps obtenu en faisant varier uniquement α, et cela de façon que $\delta\alpha = \delta t$: ce mouvement virtuel est une rotation instantanée autour de O, représentée par un vecteur ρ_α, dont on peut appeler p_α, q_α, r_α les projections sur les axes mobiles $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, et par suite il existe entre les quantités φ'_α, ψ'_α, ω'_α et p_α, q_α, r_α les mêmes relations linéaires et homogènes qu'entre φ', ψ', ω' et p, q, r.

Il résulte alors de la propriété d'invariance absolue des formes polaires à l'égard des substitutions linéaires que J_α est aussi la forme polaire par rapport à p_α, q_α, r_α de la fonction T exprimée comme forme quadratique de p, q, r; et puisque

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

on a

$$J_\alpha = App_\alpha + Bqq_\alpha + Crr_\alpha.$$

Si enfin nous observons que Ap, Bq, Cr sont les projections sur $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ du vecteur h, moment résultant par rapport à O des quantités de mouvement des différents points du corps, nous concluons que J_α n'est autre chose que le produit géométrique des deux vecteurs h et ρ_α.

Cette remarque suffit pour mettre en évidence le rôle prépondérant du vecteur h, et pour nous guider dans le choix des variables α. Appelons P le plan perpendiculaire au vecteur h, orienté dans un sens arbitraire; si p est alors le pôle de P, déterminé sans ambiguïté comme nous l'avons déjà dit au Chapitre précédent, le vecteur h est porté par l'axe Op, et h désignera sa valeur algébrique. Le plan P est déterminé par la longitude $xH = \theta$, d'un de ses nœuds H sur xy, et

par son inclinaison ε en H sur xy; si maintenant K est l'un des nœuds de $\xi\eta$ sur P, la position de P par rapport au corps est déterminée par l'arc $K\xi$ égal à χ, et par l'inclinaison σ de $\xi\eta$ sur P en K. Enfin, pour achever de déterminer la position du corps, il faut encore se donner par exemple l'arc HK, égal à u. Les relations entre les angles d'Euler φ, ψ, ω et les angles u, θ, χ, ε, σ résulteront de la considération du triangle sphérique GHK, dont les côtés sont $\psi - \theta$, $\varphi - \chi$, u et les angles respectivement opposés σ, ε, $\pi - \omega$.

Prenons pour les nouvelles variables u, θ, χ, h, ε, σ : il est bien aisé de calculer les J_α. On a d'abord $J_h = 0$, puisque φ, ψ, ω ne dépendent pas de h; on a aussi $J_\varepsilon = 0$ et $J_\sigma = 0$, puisque les vecteurs ρ_ε et ρ_σ sont dirigés suivant OH et OK, et par suite perpendiculaires au vecteur Oh. Enfin, on a $J_u = h$, $J_\theta = h\cos\varepsilon$, $J_\chi = h\cos\sigma$, puisque les vecteurs ρ_u, ρ_θ, ρ_χ sont des vecteurs unités portés respectivement par Op, Oz, $O\zeta$.

On a donc, d'après le n° 10, un changememt complètement canonique de variables en associant à u, θ, χ les nouvelles variables h, $g = h\cos\varepsilon$, $k = h\cos\sigma$. On peut avantageusement remplacer u par $v = u + \theta + \chi$; et alors il faut associer à v, θ, χ les variables conjuguées h, $g - h$, $k - h$; mais nous garderons pour l'instant u.

Il reste à savoir ce que devient la fonction $H = T - U$, exprimée à l'aide des nouvelles variables; d'abord la fonction de forces U, qui ne dépend que de φ, ψ, ω et de t, devient une fonction de u, θ, χ, $\frac{g}{h}$, $\frac{k}{h}$, et t, puisque ε et σ sont liés numériquement aux rapports $\frac{g}{h}$ et $\frac{k}{h}$. Pour calculer T, remarquons que l'on a, en projetant le vecteur h sur $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$,

$$Ap = h\sin\sigma\sin\chi, \qquad Bq = h\sin\sigma\cos\chi, \qquad Cr = h\cos\sigma,$$

d'après les valeurs évidentes des cosinus directeurs de Op par rapport aux axes mobiles. Mettons en évidence le rôle du moment C, en faisant

$$\frac{C - A}{A} = \alpha(1 + \beta), \qquad \frac{C - B}{B} = \alpha(1 - \beta).$$

On a ainsi pour les composantes de la rotation instantanée du corps

$$p = \frac{h}{C}(1 + \alpha + \alpha\beta)\sin\sigma\sin\chi, \qquad q = \frac{h}{C}(1 + \alpha - \alpha\beta)\sin\sigma\cos\chi, \qquad r = \frac{h}{C}\cos\sigma,$$

et il en résulte immédiatement

$$T = \frac{h^2}{2C} + \frac{\alpha(h^2 - k^2)}{2C}(1 - \beta\cos 2\chi),$$

en remplaçant $h^2 \sin^2\sigma$ par $h^2 - k^2$.

En résumé, on a les équations

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d\chi}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial k}, & \dfrac{dk}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \chi}, \\ \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial h}, & \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial u}, \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial g}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta}, \\ H = \dfrac{h^2}{2C} + \dfrac{\alpha(h^2 - k^2)}{2C}(1 - \beta\cos 2\chi) - U, & \\ U = f\left(u,\, \theta,\, \chi,\, \dfrac{g}{h},\, \dfrac{k}{h},\, t\right). & \end{cases}$$

16. Dans les problèmes que nous aurons à traiter, la fonction de forces U est toujours très petite par rapport à T, et doit être regardée par suite comme une fonction perturbatrice. Mais, de plus, les coefficients α et β sont petits, et le produit $\alpha\beta$ est très petit, sinon absolument négligeable. Il convient donc en réalité de joindre le terme en α tout entier, ou du moins le terme en $\alpha\beta$ de T à $-$ U pour en faire, après changement du signe, la fonction perturbatrice.

Dans le premier cas, la fonction perturbatrice est

$$V = U - \frac{\alpha(h^2 - k^2)}{2C}(1 - \beta\cos 2\chi),$$

et l'on a

$$H = \frac{h^2}{2C} - V;$$

si l'on néglige V, toutes les inconnues restent constantes, sauf u qui est de la forme $\frac{h}{C}t + u_0$, u_0 étant une constante : le mouvement du corps est une rotation permanente autour de Op. Pour tenir compte de V, il n'y a pas lieu d'appliquer la méthode de la variation des constantes, qui conduirait à conserver les mêmes variables; la fonction perturbatrice se met d'elle-même en évidence dans les équations (1).

Dans le second cas, on prend pour fonction perturbatrice

$$V = U + \frac{\alpha\beta(h^2 - k^2)}{2C}\cos 2\chi,$$

et l'on a

$$H = \frac{h^2}{2C} + \frac{\alpha(h^2 - k^2)}{2C} - V;$$

si l'on néglige V, les inconnues sont encore des constantes, sauf

$$u = \frac{h}{C}(1 + \alpha)t + u_0, \qquad \chi = -\frac{k\alpha}{C}t + \chi_0,$$

u_0, χ_0 étant des constantes : le vecteur h est fixe en grandeur et direction, les angles u et χ varient proportionnellement au temps. Comme ci-dessus, il n'y a pas lieu d'appliquer la méthode de la variation des constantes pour tenir compte de la fonction perturbatrice V, qui se met d'elle-même en évidence dans les équations (1).

Traitons cependant le problème dans l'hypothèse où l'on néglige d'abord seulement U, afin de montrer encore une fois l'application des méthodes générales du Chapitre II, lorsque ensuite, pour tenir compte de cette fonction perturbatrice, nous prendrons comme nouvelles variables les constantes arbitraires de la solution du problème réduit, ou des quantités équivalentes.

Il faut donc intégrer les équations (1) lorsqu'on y remplac H par

$$F = \frac{h^2}{2C} + \frac{\alpha(h^2 - k^2)}{2C}(1 - \beta\cos 2\chi);$$

c'est l'étude du mouvement bien connu d'un corps soustrait à toute action extérieure, autour d'un point fixe.

Tout d'abord, θ, g, h sont des constantes, de sorte que le vecteur h est fixe en grandeur et direction; de plus, la fonction F est elle-même constante, d'après le théorème des forces vives.

En appelant s une nouvelle constante liée à h et F par la relation

$$\frac{2CF}{h^2} = 1 + \alpha(1 - \beta^2)\sin^2 s,$$

et n'oubliant pas que $k = h\cos\sigma$, on a, d'après la valeur de F,

$$(1 - \beta\cos 2\chi)\sin^2\sigma = (1 - \beta^2)\sin^2 s,$$

ou bien

$$\frac{\sin^2\sigma \sin^2\chi}{1-\beta} + \frac{\sin^2\sigma \cos^2\chi}{1+\beta} = \sin^2 s;$$

on peut donc poser, en introduisant une variable auxiliaire λ,

$$\sin\sigma \sin\chi = \sqrt{1-\beta}\sin s \sin\lambda,$$
$$\sin\sigma \cos\chi = \sqrt{1+\beta}\sin s \cos\lambda,$$

et ces relations donnent encore

$$\sin^2\sigma \frac{d\chi}{dt} = \sqrt{1-\beta^2}\sin^2 s \frac{d\lambda}{dt},$$
$$\cos\sigma = \cos s \sqrt{1-\beta \operatorname{tang}^2 s \cos 2\lambda}.$$

Comme d'après les équations (1) on a

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{\alpha h}{C}\cos\sigma(1-\beta\cos 2\chi),$$

il vient, en faisant $\beta' = \beta \operatorname{tang}^2 s$,

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{1-\beta'\cos 2\lambda}} = -\frac{\alpha h \cos s\sqrt{1-\beta^2}}{C}\,dt.$$

L'angle constant s est toujours en réalité très petit, et par suite β' est extrêmement petit, de sorte qu'il n'y a pas lieu de faire usage de la théorie des fonctions elliptiques pour intégrer rigoureusement l'équation précédente.

Le coefficient de $d\lambda$ se développe sans peine en série de Fourier de la forme

$$a_0(1 + 2a_1\beta'\cos 2\lambda + 4a_2\beta'^2\cos 4\lambda + \ldots),$$

les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots$ étant eux-mêmes des séries ordonnées suivant les puissances de β'^2, et le premier terme de a_0 étant 1.

Désignant alors par l'_0 une constante arbitraire, et faisant

$$n' = -\frac{\alpha h \cos s\sqrt{1-\beta^2}}{a_0 C}, \qquad l' = n't + l'_0,$$

il vient

$$l' = \lambda + a_1\beta'\sin 2\lambda + a_2\beta'^2\sin 4l' + \ldots,$$

d'où l'on tire inversement

$$\lambda = l' + b_1 \beta' \sin 2l' + b_2 \beta'^2 \sin 4l' + \ldots,$$

les coefficients b_1, b_2, ... étant analogues à a_1, a_2, ...

On peut remarquer, sans qu'il soit nécessaire d'insister, l'analogie qui existe entre $2l'$, 2λ, 2χ, d'une part, et les anomalies moyenne, excentrique et vraie dans le mouvement elliptique; mais l'équation analogue à celle de Képler est moins simple.

On peut calculer χ par la formule

$$\operatorname{tang}\chi = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \operatorname{tang}\lambda,$$

qui donne, comme on sait,

$$\chi = \lambda + c_1 \beta \sin 2\lambda + c_2 \beta^2 \sin 4\lambda + \ldots,$$

les coefficients c_1, c_2, ... étant des séries ordonnées suivant les puissances de β^2; il en résultera

$$\chi = l' + d_1 \beta \sin 2l' + d_2 \beta^2 \sin 4l' + \ldots,$$

les d_1, d_2, ... étant semblables aux c_1, c_2, ... et dépendant en outre de $\operatorname{tang}^2 s$.

La variable k, ou plutôt $\cos\sigma$, est donnée par la formule

$$\cos\sigma = -\frac{C}{\alpha h \sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\lambda}{dt},$$

d'où

$$\cos\sigma = \frac{\cos s}{a_0}(1 + 2b_1 \beta' \cos 2l' + 4b_2 \beta'^2 \cos 4l' + \ldots);$$

on a aussi, afin de pouvoir calculer les composantes de la rotation instantanée du corps et éviter le calcul direct de χ,

$$\sin\sigma \sin\chi = \sqrt{1-\beta} \sin s (e_0 \sin l' + e_1 \beta' \sin 3l' + e_2 \beta'^2 \sin 5l' + \ldots),$$

$$\sin\sigma \cos\chi = \sqrt{1+\beta} \sin s (f_0 \cos l' + f_1 \beta' \cos 3l' + f_2 \beta'^2 \cos 5l' + \ldots),$$

les coefficients e_0, e_1, ..., f_0, f_1, ... étant ici des séries ordonnées suivant les puissances de β', avec 1 comme premier terme pour e_0 et f_0.

Enfin déterminons u, ou plutôt $v = u + \chi + \theta$; on a

$$\frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{d\chi}{dt} = \frac{h}{C} + \frac{\alpha h}{C}(1 - \cos\sigma)(1 - \beta\cos 2\chi)$$
$$= \frac{h}{C} + \frac{\alpha h}{C}(1 - \beta^2)\sin^2 s\,\frac{1}{1 + \cos\sigma},$$

comme on voit en remplaçant $1 - \beta\cos 2\chi$ par sa valeur $(1 - \beta^2)\dfrac{\sin^2 s}{\sin^2\sigma}$.

Désignons donc encore par l_0 une constante arbitraire, et faisons

$$n = \frac{h}{C} + \frac{2\alpha h}{C}(1 - \beta^2) g_0 \sin^2\frac{s}{2}, \qquad l = nt + l_0;$$

on aura pour v un développement de la forme

$$v = l + \sqrt{1 - \beta^2}\sin^2 s\,(g_1\beta'\sin 2l' + g_2\beta'^2\sin 4l' + \ldots),$$

g_0, g_1, g_2, ... étant encore des séries ordonnées suivant les puissances de β'^2, dont les coefficients dépendent en outre de $\cos s$, et g_0 ayant 1 pour premier terme.

Si dans les calculs précédents on néglige le carré de β', on aura simplement

$$n' = -\frac{\alpha h\sqrt{1 - \beta^2}\cos s}{C}, \qquad n = \frac{h}{C} + \frac{2\alpha h}{C}(1 - \beta^2)\sin^2\frac{s}{2},$$
$$\lambda = l' - \frac{\beta'}{4}\sin 2l',$$
$$\sin\sigma\sin\chi = \sqrt{1 - \beta}\sin s\left[\left(1 - \frac{\beta'}{8}\right)\sin l' - \frac{\beta'}{8}\sin 3l'\right],$$
$$\sin\sigma\cos\chi = \sqrt{1 + \beta}\sin s\left[\left(1 + \frac{\beta'}{8}\right)\cos l' - \frac{\beta'}{8}\cos 3l'\right],$$
$$\cos\sigma = \cos s\left(1 - \frac{\beta'}{2}\cos 2l'\right),$$
$$v = l - \frac{\beta'}{4}\sqrt{1 - \beta^2}\,\mathrm{tang}^2\frac{s}{2}\sin 2l'.$$

17. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, on peut, sans changer la forme des équations (1), y remplacer u par v, et en même temps k par $k_1 = k - h = h(1 - \cos\sigma)$, g par $g_1 = g - h = h(\cos\varepsilon - 1)$; et l'on a alors

$$F = \frac{h^2}{2C} - \frac{\alpha k_1(2h + k_1)}{2C}(1 - \beta\cos 2\chi), \qquad H = F - U.$$

Transformons alors ces équations en prenant comme nouvelles

variables les constantes l_0, l'_0, θ, h, s, g_1, par exemple, du mouvement que nous venons d'étudier; ou plutôt, au lieu de l_0, l'_0, les arguments l, l' égaux à $nt + l_0$, $n't + l'_0$. Comme θ et g_1 forment un couple nettement séparé de variables, il n'y a lieu que de s'occuper des quatre premières équations (1), en y remplaçant φ, χ, h, k par l, l', h, s.

Dans le mouvement simple qui correspond à $H = F$, la variable h reste constante, k_1 ou $h(\cos\sigma - 1)$ est une fonction paire de l', tandis que χ et la différence $\varphi - l$ sont des fonctions périodiques impaires de l'; d'ailleurs les développements trigonométriques de ces fonctions ne dépendent que de la constante s, et il en est de même des rapports $\frac{n}{h}$, $\frac{n'}{h}$. On peut donc appliquer directement tout ce que nous avons dit au n° 11 (4°), en prenant φ, χ pour les variables x_i, et h, k_1 pour les y_i; les arguments M, N, ... sont l, l'; M', N', ... n'existent pas, et il en est de même des paramètres a', ..., si l'on regarde C, α, β comme des constantes purement numériques.

La fonction K étant convenablement choisie, et u désignant l'une quelconque des nouvelles variables, on a

$$J_u = \left(h\frac{\partial\varphi}{\partial u} + k_1\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)_0;$$

il en résulte tout d'abord immédiatement $J_k = 0$, $J_l = h$; on a aussi $J_s = 0$, puisque $h\frac{\partial\varphi}{\partial s} + k_1\frac{\partial\chi}{\partial s}$ est une fonction périodique impaire de l'.

D'autre part, la constante J est égale à F, et il en est de même de G; en effet, la somme $\sum y_i \frac{dx_i}{dt}$ ou $\sum y_i \frac{\partial F}{\partial y_i}$ est égale à $2F$, puisque F est une forme quadratique homogène de h et de k_1; et par suite, la différence $\sum y_i \frac{dx_i}{dt} - F$, dont la partie constante est précisément G en général, se réduit ici à F.

La première des formules (12) du n° 11 donne alors, en faisant $a = h$,

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{\partial n}{\partial h} J_l + \frac{\partial n'}{\partial h} J_{l'},$$

c'est-à-dire, d'après la façon dont F, n, n' dépendent de h,

$$2F = n J_l + n' J_{l'}.$$

Comme on a

$$\frac{2CF}{h^2} = 1 + \alpha(1 - \beta^2)\sin^2 s,$$

il en résulte

$$J_{l'} = \frac{2F - nh}{n'} = a_0 h \sqrt{1-\beta^2}(\cos s - 1)\left(1 + \frac{1-g_0}{\cos s}\right),$$

a_0 et g_0 étant les coefficients précédemment définis dont la différence avec l'unité est de l'ordre de $\beta^2 \tang^4 s$. Si l'on néglige ces différences, on trouve sans peine

$$F \doteq \frac{1}{2C}\left[J_l^2 - 2\alpha\sqrt{1-\beta^2}\,J_l J_{l'} - \alpha J_{l'}^2\right];$$

mais cette expression n'est d'aucune utilité réelle.

D'après le n° 10, nous voyons finalement que l'on réalise un changement de variables complètement canonique en associant aux variables l, l', θ les trois suivantes :

$$P = J_l = h, \qquad P' = J_{l'}, \qquad Q = g_1 = h(\cos\varepsilon - 1),$$

les nouvelles équations définitives étant

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial P}, & \frac{dP}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial l}, \\ \frac{dl'}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial P'}, & \frac{dP'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial l'}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial Q}, & \frac{dQ}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta}. \end{aligned}\right.$$

Pour mettre en évidence la fonction perturbatrice U, il suffit de remplacer H par F — U ; en se souvenant que la fonction F peut s'exprimer à l'aide des seules quantités P et P', et que n et n' en sont alors précisément les dérivées partielles, on a les nouvelles équations quasi canoniques

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= n - \frac{\partial U}{\partial P}, \\ \frac{dP'}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial l'}, & \frac{dl'}{dt} &= n' - \frac{\partial U}{\partial P'}, \\ \frac{dQ}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial \theta}, & \frac{d\theta}{dt} &= \quad - \frac{\partial U}{\partial Q}. \end{aligned}\right.$$

Il sera facile ensuite, si l'on veut, de choisir d'autres variables, mieux appropriées aux circonstances réelles du problème.

LIVRE II.

ÉTUDE PRATIQUE DU MOUVEMENT KÉPLÉRIEN ET DE SES PERTURBATIONS.

CHAPITRE V.

ERMINATION DES POSITIONS HÉLIOCENTRIQUES ET GÉOCENTRIQUES.

8. Il résulte du Chapitre III que l'on peut toujours représenter le
ivement du point M comme un mouvement képlérien, dont les
ents sont généralement variables avec le temps. A chaque instant t,
coordonnées de M et les projections de sa vitesse s'expriment par
ormules mêmes du mouvement képlérien, comme si les éléments
ent fixes. Si donc on désigne par (e_0) l'ensemble des éléments à
oque t_0, et par M_0 un point fictif dont le mouvement serait le mou-
ent képlérien proprement dit déterminé par les éléments constants
, le point réel M et le point fictif M_0 ont à l'époque t_0 même
tion et même vitesse, de sorte qu'en particulier leurs trajectoires
alors tangentes. On dit que les éléments (e_0) sont les éléments
ériens *osculateurs* de la trajectoire de M au temps t_0, ou que la
ion conique définie par (e_0) est l'orbite képlérienne *osculatrice*
nouvement réel de M; cependant le contact entre cette orbite
trajectoire réelle de M n'est pas d'un ordre supérieur au premier.
uand on néglige complètement la fonction perturbatrice V, le
vement de M est un mouvement képlérien proprement dit, c'est-
re à éléments constants; et cette première approximation pourra
re pendant quelque temps. Le plus souvent, on choisira pour ces
ents constants les éléments osculateurs à une époque t_0 voisine
période de temps considérée.
ous allons montrer, dans ce Chapitre, comment on peut déter-

miner à chaque instant, d'une façon appropriée aux usages astronomiques, les positions héliocentrique et géocentrique d'une planète ou d'une comète dont l'orbite képlérienne est connue par ses éléments.

19. Les notations précédemment introduites recevront ici quelques modifications, indiquées par l'usage.

Les éléments de référence $Oxyz$, orientés dans le sens direct, sont déterminés par le Soleil, et par l'écliptique et l'équinoxe moyens d'une certaine date indiquée, généralement le commencement d'une année tropique : l'origine O est le Soleil, l'axe Ox est dirigé vers l'équinoxe, le plan xOy est celui de l'écliptique.

La longitude du nœud ascendant et l'inclinaison de l'orbite sont ☊ et i; l'angle i est positif et inférieur à π, évidemment aigu ou obtus suivant que le mouvement de M en longitude est direct ou rétrograde. La longitude du périhélie est ϖ; mais on lui substitue souvent l'élément équivalent ω, égal à la différence $\varpi -$ ☊, c'est-à-dire à la distance du périhélie au nœud.

L'orbite étant supposée elliptique, son excentricité sera e ou $\sin\varphi$; si a est le demi-grand axe, le paramètre p est égal à $a(1-e^2)$, la distance périhélie q est $a(1-e)$ ou $\frac{p}{1+e}\cdot$ Le moyen mouvement n vaut $ka^{-\frac{3}{2}}$; les anomalies vraie, excentrique et moyenne à un instant quelconque t sont respectivement v, u, M; le rayon vecteur est r. Le sixième élément de l'orbite est la longitude moyenne l_0 de l'époque, ou plutôt l'anomalie moyenne de l'époque, soit $l_0 - \varpi$ ou M_0; c'est la longitude moyenne ou l'anomalie moyenne à une certaine date fixée, t_0, dite *époque*, qui est le plus souvent la date même de l'osculation, c'est-à-dire celle pour laquelle les éléments sont osculateurs.

Dans certains cas, il convient de prendre pour époque la date T du passage au périhélie, de sorte que $M_0 = 0$, et cette date est alors le sixième élément de l'orbite.

La durée R de la révolution sidérale, c'est-à-dire le temps nécessaire pour parcourir l'orbite entière, est $\frac{2\pi}{n}$ ou $\frac{2\pi}{k}a^{\frac{3}{2}}$.

D'après le Chapitre I, on doit prendre pour k^2 la quantité

$$f(m+m_0),$$

en désignant par f le coefficient d'attraction, par m_0 la masse du

Soleil, et par m la masse du corps dont on étudie le mouvement; quand il s'agit d'une grosse planète possédant des satellites, il faut entendre par m la masse totale du système ainsi formé; quand il s'agit d'une petite planète ou d'une comète, on doit faire $m = 0$. La racine carrée k de k^2 est prise positivement en général, comme nous l'avons déjà dit.

Les unités sont choisies de la façon suivante, sauf exceptions spécifiées. L'unité de masse est celle du Soleil, de sorte que $m_0 = 1$; l'unité de temps est le jour solaire moyen, de sorte que n est le moyen mouvement *diurne*. Quant à l'unité de longueur, c'est en principe le demi-grand axe de l'orbite terrestre, supposée képlérienne, de sorte que si A est la durée de l'année sidérale en jours moyens, et m la masse du système Terre-Lune, on doit avoir par ce qui précède

$$A = \frac{2\pi}{\sqrt{f(1+m)}} \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{f} = \frac{2\pi}{A\sqrt{1+m}};$$

le coefficient d'attraction est ainsi déterminé.

Mais, en raison de l'incertitude avec laquelle sont connues les quantités A et surtout m, on ne saurait avoir ainsi une valeur précise pour f. Suivant alors la marche inverse, on a adopté pour f le nombre déterminé par Gauss, qui correspond à

$$A = 365,2563835, \qquad m = \frac{1}{354710},$$

et l'unité astronomique de longueur est maintenant définie comme étant le demi-grand axe d'une ellipse képlérienne décrite par une planète de masse infiniment petite, la durée de la révolution sidérale étant $\frac{2\pi}{\sqrt{f}}$, c'est-à-dire encore, le moyen mouvement diurne étant $\sqrt{f}$: cette unité est très voisine de la distance moyenne du Soleil à la Terre.

D'après le calcul de Gauss, on a

$$\log\sqrt{f} = \bar{2},2355814414;$$

il s'agit ici bien entendu de logarithmes décimaux, que nous représenterons toujours de cette même façon.

Toutes les fois qu'il s'agit d'une petite planète ou d'une comète, on a précisément $k = \sqrt{f}$; sinon, $k = \sqrt{f}\sqrt{1+m}$.

Comme il est usuel d'exprimer n en secondes d'arc, il convient d'avoir aussi la valeur de k exprimée de cette façon, soit k'' ; en représentant, comme d'habitude, un nombre par son logarithme placé entre crochets, on a

$$k'' = \sqrt{1+m}[3,5500065746].$$

Si l'on vient à prendre comme unités une masse, un temps et une longueur mesurés respectivement par m', t', a' avec les unités précédentes, la valeur de f deviendra f', et l'on aura

$$f' = f \times m' t'^2 a'^{-3},$$

puisque les *dimensions* de la grandeur f sont évidemment données par la formule symbolique

$$[L]^3 [M]^{-1} [T]^{-2}.$$

Si, par exemple, on voulait avoir $f' = 1$, en conservant les unités ordinaires de longueur et de masse, il faudrait prendre $t' = \frac{1}{\sqrt{f}}$, de sorte que l'unité de temps serait $58,132\ldots$ jours.

20. Pour résoudre le problème proposé, il faut tout d'abord déterminer l'anomalie vraie et le rayon vecteur en fonction du temps : dans la solution de cette question interviennent les éléments a, e, M_0 ou leurs équivalents, qu'on peut qualifier d'*intrinsèques*.

La connaissance du temps est remplacée par celle de l'anomalie moyenne

$$M = n(t - t_0) + M_0;$$

et, d'après ce que nous avons déjà vu, il est nécessaire de passer par l'intermédiaire de l'anomalie excentrique u, liée à M par l'équation de Képler

$$u - e \sin u = M.$$

C'est cette équation transcendante qu'il faut résoudre en premier lieu ; v et r se déduiront ensuite sans peine de u.

Le problème admet une seule solution, les trois anomalies variant toujours dans le même sens, étant toujours comprises dans la même demi-circonférence, et changeant de signe en même temps. On ne restreint donc pas la généralité en les supposant pour un instant positives et inférieures à π.

La fonction

$$f(u) = u - e \sin u - M$$

croît alors constamment depuis $-M$ jusqu'à $\pi - M$ quand u varie de o à π, et ses dérivées première et seconde restent toujours positives; de plus, on a les inégalités

$$f(M) < 0, \qquad f(M + e) > 0.$$

Si donc on applique à la résolution de l'équation $f(u) = 0$ la méthode d'approximation de Newton, en partant d'une valeur approchée u de la racine, supérieure à M et inférieure à $M + e$ comme à π, on trouvera une nouvelle valeur approchée

$$u' = u - \frac{f(u)}{f'(u)}$$

plus grande que la racine; et si l'on continue l'application de la même méthode en partant de cette nouvelle valeur u', on tendra rapidement vers la racine, par valeurs plus grandes d'ailleurs. Si, exceptionnellement, la valeur u' était supérieure aux limites $M + e$ et π (ce qui ne peut arriver que si la valeur initiale de u est inférieure à la racine), il est clair qu'il faudrait la rejeter et lui substituer la plus petite des limites ci-dessus.

Il est à peine utile de dire qu'à chaque nouvelle approximation, on adoptera non pas la valeur exacte fournie par l'approximation précédente, mais la valeur la plus voisine, choisie de façon à rendre toute interpolation inutile dans l'usage des tables.

Les angles u, v, M sont pratiquement évalués non pas en radians, mais en degrés, minutes ou secondes. Soit généralement R la valeur du radian exprimé avec cette même unité (R°, R' ou R'', suivant le cas); la formule ci-dessus doit être écrite sous la forme définitive

$$u' = u + \frac{M + eR \sin u - u}{1 - e \cos u}.$$

En l'absence de tout renseignement sur la racine cherchée, on prendra une première valeur approchée comme il a été dit ci-dessus, en cherchant à vue à vérifier l'égalité

$$u = M + eR \sin u.$$

Il suffit d'écrire quelques chiffres pour obtenir une valeur appro-

chée à une ou deux minutes près. On peut aussi s'aider de tables ou d'abaques appropriés pour obtenir du premier coup une valeur plus ou moins approchée. La Table I des pages 71 et 72 peut servir à cet usage : mais son objet principal est de montrer la variation simultanée des trois anomalies du mouvement elliptique. Les arguments de la Table sont l'anomalie vraie v qui varie de 10° en 10°, depuis 0° jusqu'à 180°, et l'excentricité qui reçoit les valeurs 0,05, 0,10, ..., 0,95, se succédant de 0,05 en 0,05. Cette Table n'étant destinée qu'à servir d'indication, l'erreur des valeurs de u et de M que l'on y trouve peut quelquefois dépasser un demi-dixième de degré.

Quand on a trouvé la racine u de l'équation de Képler avec l'approximation désirée, on aura r et v par les formules (a) ou (b) du Chapitre III, savoir

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{r}{a}\sin v = \cos\varphi \sin u, \\ \dfrac{r}{a}\cos v = \cos u - e, \end{cases}$$

ou bien

$$(2)\quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{r}{a}}\sin\dfrac{v}{2} = \sqrt{1+e}\sin\dfrac{u}{2}, \\ \sqrt{\dfrac{r}{a}}\cos\dfrac{v}{2} = \sqrt{1-e}\cos\dfrac{u}{2}; \end{cases}$$

on peut encore employer le système équivalent

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{r}{a} = 1 - e\cos u, \\ \sin\dfrac{v-u}{2} = \sin\dfrac{\varphi}{2}\sin u\sqrt{\dfrac{a}{r}}; \end{cases}$$

la première de ces relations a été établie précédemment, et la seconde résulte immédiatement d'une combinaison évidente des équations (2), puisque l'on a

$$\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e} = 2\sin\frac{\varphi}{2}.$$

On choisira le système qui donnera la plus grande précision, en général le troisième, si l'angle φ est de grandeur médiocre; et l'une quelconque des autres formules pourra servir de vérification.

TABLE I.

v	$e = 0,05$		$e = 0,10$		$e = 0,15$		$e = 0,20$		$e = 0,25$	
	u	M	u	M	u	M	u	M	u	M
°	°	°	°	°	°	°	°	°	°	°
0....	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
10....	9,5	9,0	9,1	8,1	8,6	7,3	8,2	6,5	7,8	5,8
20....	19,0	18,1	18,1	16,3	17,2	14,7	16,4	13,2	15,6	11,7
30....	28,6	27,2	27,2	24,6	25,9	22,2	24,7	19,9	23,5	17,8
40....	38,2	36,4	36,4	33,0	34,8	29,9	33,1	26,8	31,5	24,0
50....	47,8	45,7	45,7	41,6	43,7	37,8	41,7	34,1	39,7	30,6
60....	57,5	55,1	55,1	50,4	52,8	46,0	50,5	41,6	48,2	37,5
70....	67,3	64,7	64,7	59,5	62,1	54,5	59,5	49,6	56,9	44,9
80....	77,2	74,4	74,4	68,9	71,6	63,5	68,8	58,1	66,0	53,0
90....	87,1	84,3	84,3	78,6	81,4	72,9	78,5	67,2	75,5	61,7
100....	97,2	94,3	94,3	88,6	91,4	82,8	88,4	77,0	85,4	71,1
110....	107,3	104,5	104,5	99,0	101,7	93,3	98,8	87,4	95,8	81,5
120....	117,5	114,9	114,9	109,7	112,2	104,3	109,5	98,7	106,6	92,9
130....	127,8	125,5	125,5	120,8	123,1	115,8	120,5	110,7	117,9	105,2
140....	138,1	136,2	136,2	132,2	134,1	127,9	131,9	123,4	129,7	118,6
150....	148,5	147,0	147,0	143,9	145,4	140,5	143,7	136,9	141,8	133,0
160....	159,0	158,0	157,9	155,8	156,8	153,4	155,6	150,9	154,4	148,2
170....	169,5	169,0	169,0	167,9	168,4	166,6	167,8	165,3	167,1	163,9
180....	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0

v	$e = 0,30$		$e = 0,35$		$e = 0,40$		$e = 0,45$		$e = 0,50$	
	u	M	u	M	u	M	u	M	u	M
°	°	°	°	°	°	°	°	°	°	°
0....	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
10....	7,3	5,1	6,9	4,5	6,6	3,9	6,2	3,4	5,8	2,9
20....	14,7	10,4	14,0	9,1	13,2	7,9	12,4	6,9	11,6	5,9
30....	22,2	15,7	21,1	13,9	19,9	12,1	18,7	10,5	17,6	8,9
40....	29,9	21,3	28,3	18,8	26,8	16,5	25,3	14,3	23,7	12,2
50....	37,8	27,2	35,9	24,1	34,0	21,2	32,0	18,4	30,1	15,8
60....	45,9	33,6	43,7	29,8	41,4	26,3	39,1	22,9	36,9	19,7
70....	54,4	40,4	51,8	36,1	49,3	31,9	46,7	27,9	44,0	24,1
80....	63,2	47,9	60,4	43,0	57,6	38,2	54,7	33,6	51,7	29,2
90....	72,5	56,1	69,5	50,7	66,4	45,4	63,3	40,2	60,0	35,2
100....	82,3	65,3	79,2	59,5	75,9	53,7	72,6	48,0	69,1	42,3
110....	92,7	75,5	89,5	69,4	86,1	63,3	82,7	57,1	79,0	50,9
120....	103,6	86,9	100,5	80,8	97,2	74,4	93,7	68,0	90,0	61,4
130....	115,1	99,6	112,2	93,6	109,1	87,4	105,7	80,9	102,1	74,1
140....	127,2	113,6	124,6	108,1	121,9	102,4	118,8	96,3	115,5	89,7
150....	139,9	128,8	137,8	124,3	135,5	119,4	133,0	114,1	130,2	108,3
160....	153,0	145,2	151,5	141,9	149,9	138,3	148,0	134,4	146,0	130,0
170....	166,4	162,4	165,6	160,6	164,8	158,8	163,8	156,6	162,8	154,3
180....	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0

TABLE I (*suite*).

v	$e = 0,50$		$e = 0,55$		$e = 0,60$		$e = 0,65$		$e = 0,70$	
	u	M	u	M	u	M	u	M	u	M
°	°	°	°	°	°	°	°	°	°	°
0....	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
10....	5,8	2,9	5,4	2,4	5,0	2,0	4,6	1,6	4,2	1,3
20....	11,6	5,9	10,9	4,9	10,1	4,1	9,3	3,3	8,5	2,6
30....	17,6	8,9	16,4	7,5	15,3	6,2	14,1	5,0	12,8	3,9
40....	23,7	12,2	22,2	10,3	20,6	8,5	19,0	6,9	17,4	5,4
50....	30,1	15,8	28,2	13,3	26,2	11,0	24,2	9,0	22,2	7,0
60....	36,9	19,7	34,6	16,7	32,2	13,9	29,8	11,3	27,3	8,9
70....	44,0	24,1	41,3	20,5	38,6	17,1	35,7	14,0	32,8	11,1
80....	51,7	29,2	48,7	25,0	45,5	21,0	42,3	17,2	38,8	13,7
90....	60,0	35,2	56,6	30,3	53,1	25,6	49,5	21,2	45,6	16,9
100....	69,1	42,3	65,4	36,8	61,6	31,3	57,5	26,1	53,2	21,1
110....	79,0	50,9	75,2	44,7	71,1	38,5	66,7	32,5	61,9	26,5
120....	90,0	61,4	86,0	54,6	81,8	47,8	77,2	40,9	72,1	33,9
130....	102,1	74,1	98,3	67,1	94,0	59,7	89,3	52,1	84,0	44,1
140....	115,5	89,7	111,9	82,7	107,9	75,2	103,4	67,1	98,2	58,5
150....	130,2	108,3	127,1	102,0	123,6	95,0	119,6	87,2	114,9	78,6
160....	146,0	130,0	143,8	125,1	141,1	119,6	138,1	113,2	134,5	105,8
170....	162,8	154,3	161,6	151,6	160,2	148,5	158,5	144,8	156,5	140,5
180....	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0

v	$e = 0,75$		$e = 0,80$		$e = 0,85$		$e = 0,90$		$e = 0,95$	
	u	M	u	M	u	M	u	M	u	M
°	°	°	°	°	°	°	°	°	°	°
0....	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
10....	3,8	0,9	3,3	0,7	2,9	0,4	2,3	0,2	1,6	0,1
20....	7,6	1,9	6,7	1,4	5,7	0,9	4,6	0,5	3,2	0,2
30....	11,6	3,0	10,2	2,1	8,7	1,3	7,0	0,7	4,9	0,3
40....	15,7	4,1	13,8	2,9	11,8	1,8	9,5	1,0	6,7	0,3
50....	20,0	5,3	17,7	3,8	15,1	2,4	12,2	1,3	8,5	0,5
60....	24,6	6,7	21,8	4,8	18,7	3,1	15,1	1,7	10,6	0,6
70....	29,6	8,4	26,3	6,0	22,6	3,9	18,3	2,1	12,8	0,7
80....	35,2	10,4	31,3	7,5	26,9	4,9	21,8	2,6	15,3	0,9
90....	41,4	13,0	36,9	9,4	31,8	6,1	25,8	3,4	18,2	1,2
100....	48,5	16,3	43,3	11,9	37,5	7,9	30,6	4,3	21,6	1,6
110....	56,7	20,8	50,9	15,3	44,3	10,3	36,3	5,8	25,8	2,1
120....	66,4	27,0	60,0	20,3	52,5	13,9	43,3	7,9	31,0	3,0
130....	78,1	36,0	71,1	27,7	62,8	19,5	52,4	11,5	37,9	4,5
140....	92,2	49,2	85,0	39,3	76,1	28,8	64,4	17,9	47,5	7,4
150....	109,3	68,8	102,4	57,6	93,5	44,9	81,1	30,2	61,7	13,8
160....	130,0	97,1	124,2	86,4	116,5	72,9	104,9	55,1	84,5	30,3
170....	153,9	135,1	150,6	128,1	145,8	118,5	138,3	103,9	122,7	76,9
180....	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0

Au lieu de faire cette détermination de v et de r seulement quand on a obtenu la valeur définitive de u, il sera manifestement avantageux, au point de vue du calcul, de la faire dès que l'on aura une valeur de u qui n'a plus besoin que d'une seule correction pour conduire au degré d'approximation recherché. Les valeurs obtenues seront alors corrigées de la façon suivante pour devenir définitives.

L'équation de Képler, la relation qui exprime r en fonction de u, et l'équation des aires donnent entre les différentielles $d\text{M}$, du, dv, dr les relations

$$du = \frac{a}{r}\,d\text{M}, \qquad dv = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sqrt{1-e^2}\,d\text{M}, \qquad \frac{dr}{r} = \left(\frac{a}{r}\right)^2 e \sin u\, d\text{M};$$

dans cette dernière formule, introduisons à la place de dr la différentielle $d(\log r)$: désignant par mod le module des logarithmes décimaux, et supposant les différentielles $d\text{M}$, du, dv exprimées à l'aide de l'unité choisie pour les angles, il viendra

$$d(\log r) = \frac{\text{mod}}{\text{R}} \left(\frac{a}{r}\right)^2 e \sin u\, d\text{M}.$$

Si donc la valeur choisie pour u conduit à une anomalie moyenne M' très voisine de M, et à des valeurs v, r pour l'anomalie vraie et le rayon vecteur, il suffira d'appliquer les formules

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} & d\text{M} = \text{M} - \text{M}' = \text{M} + e\text{R}\sin u - u, \\ & du = \frac{a}{r}\,d\text{M}, \qquad dv = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos\varphi\, d\text{M}, \\ & d(\log r) = \frac{\text{mod}}{\text{R}^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 (e\text{R}\sin u)\, d\text{M}, \end{aligned}\right.$$

pour connaître les corrections qu'il faut appliquer à u, v, $\log r$ afin d'obtenir leurs valeurs définitives.

Dans la dernière de ces formules, on a mis en évidence le facteur $e\text{R}\sin u$ qui figure déjà dans le calcul de M.

Si la valeur définitive de u est inutile, on s'abstiendra de la calculer.

Presque toujours, on connaît à l'avance des valeurs très approchées de u et de v. Si, en effet, on a déjà résolu le problème pour une certaine valeur M' de l'anomalie moyenne, on aura des valeurs très approchées de u et de v correspondant à une valeur voisine M en appliquant précisément les formules précédentes, où l'on fait

$$d\text{M} = \text{M} - \text{M}'.$$

C'est ce qui arrive dans le calcul d'une éphéméride, où l'on peut encore s'aider de la marche des différences des fonctions u et v pour prévoir leur valeurs très approchées à chaque date nouvelle.

Dans un tel calcul, quand une seule approximation nouvelle est nécessaire, il peut être aussi avantageux de partir de la valeur approchée de v : on calcule alors u et r par l'un des systèmes suivants, tout semblables aux systèmes (1), (2), (3) :

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{p}{r}\sin u = \cos\varphi \sin v, \\ \dfrac{p}{r}\cos u = \cos v + e; \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{p}{r}}\sin\dfrac{u}{2} = \sqrt{1-e}\sin\dfrac{v}{2}, \\ \sqrt{\dfrac{p}{r}}\cos\dfrac{u}{2} = \sqrt{1+e}\cos\dfrac{v}{2}; \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{p}{r} = 1 + e\cos v, \\ \sin\dfrac{v-u}{2} = \sin\dfrac{\varphi}{2}\sin v\sqrt{\dfrac{r}{p}}, \end{cases}$$

et l'on achève par les formules (4) écrites sous la forme

$$(8)\quad \begin{cases} dM = M + eR\sin u - u, \\ du = \dfrac{p}{r}\,\text{séc}^2\varphi\, dM, \qquad dv = \left(\dfrac{p}{r}\right)^2 \text{séc}^3\varphi\, dM, \\ d(\log r) = \dfrac{\text{mod}}{R^2}(eR\sin u)\,\text{séc}\varphi\, dv \quad (^1). \end{cases}$$

Exemple. — On considère l'orbite d'éléments [2]

$$\varphi = 14^\circ 12' 1'',87, \qquad \log a = 0,4224389.$$

Voici d'abord les constantes que l'on peut avoir à employer :

$$e = \sin\varphi = [\bar{1},3897262], \qquad \cos\varphi = [\bar{1},9865224], \qquad \log p = 0,3954837,$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = [\bar{1},0920395], \qquad \sqrt{1+e} = [0,0476398], \qquad \sqrt{1-e} = [\bar{1},9388825],$$

$$eR'' = [4,7041513], \qquad \frac{\text{mod}}{R^2} = [\overline{11},0089].$$

---

(1) L'usage des Tables du *Mouvement képlérien* de M. F. Boquet permettra d'abréger beaucoup ces calculs, et donnera les résultats à première vue quand on ne dépasse pas l'approximation de cinq décimales.

(2) *Cf.* C.-F. Gauss, *Theoria motus.*, art. 10, 13, 14.

1° On donne $M = 27°31'5'',23$.

Comme $eR° = 14°,1$, on peut évidemment partir de la valeur de 35° pour u, et un simple calcul à trois décimales donne pour valeur plus exacte 35°,7.

Un calcul à cinq décimales fait avec la valeur initiale 35°42′ donne la nouvelle valeur 35°43′30″, exacte à moins d'une seconde près. Avec cette nouvelle valeur, appliquant les formules (3) et (4), on a successivement :

$$\frac{a}{r} = [0,0964514], \quad \log r = 0,3259875, \quad v = 44°58'36'',38,$$
$$dM = 0'',39, \quad du = 0'',49, \quad dv = 0'',59, \quad d(\log r) = 0,0000002,$$
$$u = 35°43'30'',49, \quad v = 44°58'36'',97, \quad \log r = 0,3259877.$$

2° On donne $M = 30°15'32'',34$.

L'anomalie moyenne ayant ainsi reçu un accroissement

$$dM = 2°44',5,$$

il en résulte pour v un accroissement de 4°9′; mais cette valeur doit être trop grande, puisque le quotient différentiel $\frac{dv}{dM}$ diminue en même temps que $\frac{a}{r}$, c'est-à-dire quand M augmente. Partant donc de 49°4′ comme valeur approchée de v, et appliquant les formules (7) et (8), on a successivement :

$$\frac{p}{r} = [0,0647298], \quad \log r = 0,3307539, \quad u = 39°7'19'',12,$$
$$dM = 20'',54, \quad du = 25'',37, \quad dv = 30'',37, \quad d(\log r) = 0,0000102,$$
$$u = 39°7'44'',49, \quad v = 49°4'30'',37, \quad \log r = 0,3307641.$$

21. Le calcul toujours nécessaire de l'anomalie moyenne M en fonction de l'anomalie excentrique u ne peut plus être fait avec l'approximation qui correspond à l'emploi des Tables usuelles quand, l'excentricité étant voisine de l'unité, l'angle u a une valeur médiocre, inférieure à 60° environ. Cela tient à ce que les nombres u et $e \sin u$ sont alors très voisins : si, par exemple, on fait $u = 10°$ et $e = 0,99$, on a avec sept chiffres significatifs

$$u = 0,1745329, \quad e \sin u = 0,1719117,$$

et la différence $u - e \sin u$ n'a plus que cinq chiffres significatifs.

Un coup d'œil jeté sur la Table I montre d'ailleurs que si l'excentricité se rapproche de l'unité, l'anomalie excentrique reste petite même pour de très grandes valeurs de l'anomalie vraie, de sorte que la difficulté que nous venons de signaler tend à devenir la règle générale. Dans un tel cas, qui est celui des comètes à longue période, il est donc nécessaire de modifier la méthode de calcul exposée au paragraphe précédent, et de lui en substituer une autre dans laquelle la même difficulté ne se rencontre plus.

Avant de montrer comment on peut y parvenir, nous allons faire quelques observations préliminaires qui nous permettront d'étudier en même temps les orbites hyperboliques, et de traiter d'abord le mouvement parabolique.

L'excentricité étant voisine de l'unité, et le paramètre conservant une valeur finie, le demi-grand axe a devient très grand, et le moyen mouvement n très petit, de sorte que l'anomalie moyenne M reste longtemps très petite, et l'emploi de ces diverses quantités devient incommode. C'est alors qu'on se sert de la distance périhélie q et de l'époque T d'un passage au périhélie.

On a généralement

$$n = ka^{-\frac{3}{2}} = kq^{-\frac{3}{2}}(1-e)^{\frac{3}{2}},$$

et, par suite,

$$\mathrm{M} = kq^{-\frac{3}{2}}(1-e)^{\frac{3}{2}}(t-\mathrm{T}).$$

Faisons

$$\varepsilon = \sin\psi = \sqrt{\frac{1-e}{2}},$$

et posons

$$\mathrm{P} = \frac{k(t-\mathrm{T})}{\sqrt{2q^3}};$$

P est la quantité qu'il convient de substituer à l'anomalie moyenne M.

On a $\mathrm{M} = 4\varepsilon^3\mathrm{P}$, et par suite l'équation de Képler devient

$$u - e\sin u = 4\varepsilon^3\mathrm{P}.$$

Quant aux formules nécessaires pour relier l'anomalie vraie et le rayon vecteur au temps, on peut les réduire à celles-ci :

$$\tan\frac{u}{2} = \tan\psi\tan\frac{v}{2},$$

$$\frac{q}{r} = \sec^2\frac{u}{2}\cos^2\frac{v}{2},$$

qui se déduisent immédiatement des équations (6) par exemple, et de la définition de l'angle ψ.

Les formules différentielles elles-mêmes prennent la forme

$$dv = 2\left(\frac{q}{r}\right)^2 \cos\psi \, dP, \qquad \frac{dr}{r} = \left(\frac{q}{r}\right)^2 \frac{e \sin u}{\varepsilon} dP.$$

Ces formules conviennent évidemment aussi bien au mouvement hyperbolique qu'au mouvement elliptique : mais, dans le mouvement hyperbolique, l'excentricité étant supérieure à l'unité, les quantités ε, ψ, u deviennent purement imaginaires, les autres ne changeant pas. Afin d'éviter l'emploi des imaginaires, il convient de changer ε, ψ, u en $i\varepsilon$, iu, $i\psi$, en désignant par i comme d'habitude $\sqrt{-1}$, de sorte que l'on aura, en introduisant les fonctions hyperboliques, l'ensemble de formules

$$\varepsilon = \operatorname{sh}\psi = \sqrt{\frac{e-1}{2}},$$

$$e \operatorname{sh} u - u = 4\varepsilon^3 P,$$

$$\operatorname{th}\frac{u}{2} = \operatorname{th}\psi \operatorname{tang}\frac{v}{2},$$

$$\frac{q}{r} = \operatorname{séch}^2\frac{u}{2}\cos^2\frac{v}{2},$$

$$dv = 2\left(\frac{q}{r}\right)^2 \operatorname{ch}\psi \, dP, \qquad \frac{dr}{r} = \left(\frac{q}{r}\right)^2 \frac{e \operatorname{sh} u}{\varepsilon} dP.$$

La fonction u croît en même temps que P de $-\infty$ à $+\infty$; aux limites, on a

$$\operatorname{th}\frac{u}{2} = \mp 1,$$

et par suite

$$\operatorname{tang}\frac{v}{2} = \mp \coth\psi;$$

c'est-à-dire que si l'on appelle v_0 l'angle positif et inférieur à π dont la sécante est $-e$, l'anomalie vraie varie de $-v_0$ à $+v_0$, en s'annulant au périhélie; elle croît d'ailleurs constamment avec u et avec P, changeant de signe et s'annulant en même temps que ces deux quantités. Ces faits sont en évidence sur la formule générale qui donne r en fonction de v, puisque le rayon vecteur doit être positif.

Si l'on veut éviter l'emploi des fonctions hyperboliques, on fera

$$\operatorname{th}\frac{u}{2} = \operatorname{tang}\frac{u_1}{2} = \sin\frac{u'}{2}, \qquad \varepsilon = \operatorname{tang}\psi',$$

u_1 variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, et u' de $-\pi$ à $+\pi$; et l'on aura

$$e \operatorname{tang} u_1 - \frac{1}{\operatorname{mod}} \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u_1}{2}\right) = 4\varepsilon^3 \mathrm{P},$$

$$\operatorname{tang}\frac{u_1}{2} = \sin\frac{u'}{2} = \sin\psi' \operatorname{tang}\frac{v}{2},$$

$$\frac{q}{r} = \cos^2\frac{u'}{2}\cos^2\frac{v}{2},$$

$$dv = 2\left(\frac{q}{r}\right)^2 \operatorname{séc}\psi' \, d\mathrm{P}, \qquad \frac{dr}{r} = \left(\frac{q}{r}\right)^2 \frac{e \operatorname{tang} u_1}{\varepsilon} \, d\mathrm{P}.$$

On peut appliquer à la détermination de v et r en fonction du temps, c'est-à-dire de P, des méthodes en tout semblables à celles développées ci-dessus pour le mouvement elliptique; mais il est inutile d'y insister, car, en général, dans une orbite hyperbolique, l'excentricité est voisine de l'unité, et la difficulté précédemment signalée se retrouve ici, les nombres $e \operatorname{sh} u$ et u étant presque toujours très voisins.

Pour obtenir les formules relatives au mouvement parabolique, il suffit de faire tendre e vers l'unité, c'est-à-dire ε et ψ vers zéro, dans les formules du mouvement elliptique réunies ci-dessus. L'anomalie excentrique u tend alors vers zéro, et si l'on fait $\theta = \operatorname{tang}\frac{u}{2}$, θ est une quantité du premier ordre par rapport à ε, dont la partie principale est $\varepsilon \operatorname{tang}\frac{v}{2}$. Des développements connus donnent

$$u = 2\left(\theta - \frac{\theta^3}{3} + \ldots\right),$$

$$\sin u = 2(\theta - \theta^3 + \ldots),$$

et comme $e = 1 - 2\varepsilon^2$, la quantité $u - e \sin u$ est du troisième ordre par rapport à ε, avec la partie principale

$$4\varepsilon^2\theta + \frac{4}{3}\theta^3.$$

L'équation de Képler devient alors

$$\mathrm{P} = \frac{\theta}{\varepsilon} + \frac{\theta^3}{3\varepsilon^3} + \ldots,$$

et, en passant à la limite, on a l'équation du mouvement parabolique

$$(9) \qquad P = \tang\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\tang^3\frac{v}{2},$$

à laquelle il faut joindre

$$\frac{q}{r} = \cos^2\frac{v}{2}, \qquad dv = 2\left(\frac{q}{r}\right)^2 dP, \qquad \frac{dr}{r} = 2\left(\frac{q}{r}\right)^2 \tang\frac{v}{2}\, dP.$$

Le calcul direct de P par la formule (9) est immédiat, avec l'emploi des logarithmes d'addition. Cependant on a l'habitude de le faciliter en faisant usage de la Table dite de *Barker*, qui donne directement en fonction de v la quantité CP ou son logarithme, en désignant par C une certaine constante dont le choix diffère suivant les auteurs; quelquefois d'autres Tables donnent inversement v en fonction de CP.

Le problème inverse, qui est notre problème fondamental, consiste à déterminer v connaissant P, et les Tables précédentes donnent immédiatement la solution. A défaut d'une telle Table, on pourrait résoudre l'équation (9) qui est du troisième degré par rapport à $\tang\frac{v}{2}$, en appliquant la méthode trigonométrique connue, qui conduit immédiatement aux formules

$$\cot 2\alpha = \frac{3P}{2}, \qquad \tang\beta = \sqrt[3]{\tang\alpha}, \qquad \tang\frac{v}{2} = 2\cot 2\beta.$$

Mais il vaut mieux, en général, employer une méthode d'approximation, comme pour résoudre l'équation de Képler du mouvement elliptique. Si v est une valeur approchée de l'inconnue, et s'il lui correspond P′, on aura une valeur plus exacte en faisant $dP = P - P'$, et en appliquant à v la correction

$$dv = 2R\left(\frac{q}{r}\right)^2 dP,$$

où comme précédemment on a introduit la valeur R du radian exprimé avec la même unité que dv.

Quand la valeur de v est assez approchée pour qu'il n'y ait qu'une seule correction à faire, on peut aussi calculer avec précision la valeur de $\log r$ qui correspond à v, et lui appliquer finalement la correction

$$d(\log r) = \frac{\text{mod}}{R}\tang\frac{v}{2}\, dv.$$

Le plus souvent, il vaudra mieux introduire dans l'expression de dv, au lieu de dP, la différence

$$d(\log P) = \log P - \log P',$$

et elle devient alors

$$dv = \frac{2\,R}{\text{mod}}\left(\frac{q}{r}\right)^2 P\, d(\log P).$$

Pour les raisons déjà indiquées, il est bien rare que l'on ne connaisse pas une valeur approchée et même très approchée de v, de sorte que l'on se trouve précisément dans le cas qui vient d'être développé.

Si, cependant, il n'en est pas ainsi, on pourra s'aider de la Table II de la page 81 qui, avec v comme argument variant de 2° en 2°, donne les valeurs de P et leurs variations pour 1°.

Exemple. — On donne [1]

$$\log q = \bar{1},9650486, \qquad \log P = 0,0146574.$$

On a $P = 1,0343$, et la Table II donne pour valeur approchée

$$v = 79°,93 = 79°56'.$$

Partant de ce nombre et des constantes,

$$\frac{2\,R''}{\text{mod}} = [5,9776], \qquad \frac{\text{mod}}{R''} = [\bar{6},3234],$$

on trouve d'abord

$$d\log P = -0,0000082, \qquad \frac{q}{r} = [\bar{1},7689318], \qquad \log r = 0,1961168,$$

puis

$$dv = -2'',78, \qquad d(\log r) = -0,0000049,$$

de sorte que finalement

$$v = 79°55'57'',22, \qquad \log r = 0,1961119.$$

L'erreur sur v peut atteindre plusieurs centièmes de seconde, comme le montre le calcul lui-même.

Lorsque P est grand, c'est-à-dire quand v se rapproche de 180°, on trouve rapidement une valeur très approchée de v de la façon suivante.

---

(1) *Cf.* J.-C. WATSON, *Theoretical Astronomy*, p. 108.

TABLE II.

v	P	Variation pour 1°	v	P	Variation pour 1°	v	P	Variation pour 1°
0°...	0,0000	0,0087	60°...	0,6415	0,0155	120°...	3,464	0,140
2...	0,0175	0,0087	62...	0,6732	0,0162	122...	3,761	0,158
4...	0,0349	0,0087	64...	0,7062	0,0169	124...	4,098	0,180
6...	0,0525	0,0088	66...	0,7407	0,0176	126...	4,482	0,205
8...	0,0700	0,0088	68...	0,7768	0,0185	128...	4,923	0,236
10...	0,0877	0,0089	70...	0,8146	0,0194	130...	5,432	0,274
12...	0,1055	0,0089	72...	0,8544	0,0204	132...	6,023	0,319
14...	0,1234	0,0090	74...	0,8962	0,0215	134...	6,714	0,374
16...	0,1415	0,0091	76...	0,9403	0,0226	136...	7,529	0,443
18...	0,1597	0,0092	78...	0,9868	0,0239	138...	8,498	0,529
20...	0,1782	0,0093	80...	1,0360	0,0253	140...	9,661	0,638
22...	0,1968	0,0094	82...	1,0882	0,0269	142...	11,07	0,78
24...	0,2158	0,0095	84...	1,1437	0,0286	144...	12,80	0,96
26...	0,2350	0,0097	86...	1,2028	0,0305	146...	14,94	1,19
28...	0,2545	0,0098	88...	1,2659	0,0326	148...	17,63	1,51
30...	0,2744	0,0100	90...	1,3333	0,0349	150...	21,06	1,94
32...	0,2946	0,0102	92...	1,4057	0,0375	152...	25,52	2,55
34...	0,3153	0,0104	94...	1,4834	0,0403	154...	31,42	3,41
36...	0,3364	0,0107	96...	1,5672	0,0435	156...	39,41	4,67
38...	0,3579	0,0109	98...	1,6578	0,0471	158...	50,53	6,58
40...	0,3800	0,0112	100...	1,7560	0,0511	160...	66,47	9,60
42...	0,4027	0,0115	102...	1,863	0,056	162...	90,21	14,6
44...	0,4260	0,0118	104...	1,979	0,061	164...	127,2	23,3
46...	0,4500	0,0122	106...	2,106	0,067	166...	188,2	39,6
48...	0,4746	0,0125	108...	2,246	0,073	168...	296,6	73,1
50...	0,5001	0,0129	110...	2,399	0,081	170...	509,2	151
52...	0,5264	0,0134	112...	2,569	0,089	172...	989,2	369
54...	0,5536	0,0138	114...	2,757	0,099	174...	2335	1163
56...	0,5818	0,0144	116...	2,967	0,111	176...	7856	5883
58...	0,6111	0,0149	118...	3,201	0,124	178...	62735	94065
60...	0,6415	0,0155	120...	3,464	0,140	180...	∞	∞

Remarquons que v étant voisin de π, de sorte que $\tang\frac{v}{2}$ est très grand, la fonction $\frac{1}{3}\left(\tang\frac{v}{2}+\cot\frac{v}{2}\right)^3$ a précisément pour partie principale $\frac{1}{3}\tang^3\frac{v}{2}+\tang\frac{v}{2}$, et même ne diffère de cette partie que d'une quantité très petite qui contient $\cot\frac{v}{2}$ en facteur. D'autre part, cette fonction est égale à $\frac{8}{3\sin^3 v}$; on a donc une valeur très approchée de v par la formule

$$\sin v = \sqrt[3]{\frac{8}{3\,\mathrm{P}}},$$

en ayant soin de prendre l'angle v obtus.

Exemple. — On donne $\log \mathrm{P} = 1,8684731$; la formule précédente donne la valeur approchée $160°42'$ qui conduit à

$$\log \mathrm{P}' = 1,8673869;$$

on en déduit

$$dv = 60'',02 \qquad \text{et} \qquad v = 160°43'0'',02.$$

Si une grande approximation est nécessaire, on pourra recommencer le calcul avec $v = 160°43'$ (car ici v est bien déterminé), et l'on trouvera que cette valeur est entièrement exacte.

22. Revenons maintenant au cas des orbites elliptiques ou hyperboliques dont l'excentricité est voisine de l'unité; la Table III de la page 83, tout à fait analogue à la Table I, donne pour les excentricités 0,55, 0,60, ..., 0,95, les valeurs simultanées de v, de u et de P, afin de montrer leurs variations correspondantes. La Table IV de la page 84 a le même objet pour les orbites hyperboliques, et donne les valeurs simultanées de v, u, u_1, u', P pour les deux excentricités 1,05 et 1,10; il est inutile d'aller plus loin, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer. L'argument, dans chacune de ces Tables, est toujours l'anomalie vraie, prise de 10° en 10°, et l'on y trouve encore les valeurs de P pour $e = 1$.

Il s'agit de modifier le calcul de l'équation de Képler de façon à faire disparaître la difficulté qui provient de la petitesse relative des différences $u - e\sin u$ ou $e\,\mathrm{sh}\,u - u$. Voici, pour y parvenir, un procédé naturel fort simple qui, s'il demande peut-être un peu plus de peine que la plupart des méthodes classiques fondées sur l'emploi de la Table de Barker et de tables complémentaires assez étendues, a l'avantage de n'exiger qu'une table auxiliaire extrêmement courte.

Table III.

v	$e = 0,55$		$e = 0,60$		$e = 0,65$		$e = 0,70$		$e = 0,75$	
	u	P	u	P	u	P	u	P	u	P
0°	0°,0	0,000	0°,0	0,000	0°,0	0,000	0°,0	0,000	0°,0	0,000
10	5,4	0,100	5,0	0,098	4,6	0,096	4,2	0,095	3,8	0,094
20	10,9	0,201	10,1	0,198	9,3	0,195	8,5	0,193	7,6	0,190
30	16,4	0,307	15,3	0,303	14,1	0,299	12,8	0,295	11,6	0,291
40	22,2	0,421	20,6	0,416	19,0	0,410	17,4	0,406	15,7	0,401
50	28,2	0,544	26,2	0,539	24,2	0,534	22,2	0,528	20,0	0,523
60	34,6	0,682	32,2	0,677	29,8	0,673	27,3	0,668	24,6	0,663
70	41,3	0,839	38,6	0,837	35,7	0,834	32,8	0,831	29,6	0,828
80	48,7	1,022	45,5	1,024	42,3	1,026	38,8	1,028	35,2	1,029
90	56,6	1,239	53,1	1,250	49,5	1,261	45,6	1,272	41,4	1,282
100	65,4	1,50	61,6	1,53	57,5	1,56	53,2	1,58	48,5	1,61
110	75,2	1,83	71,1	1,88	66,7	1,94	61,9	1,99	56,7	2,05
120	86,0	2,23	81,8	2,33	77,2	2,43	72,1	2,55	66,4	2,67
130	98,3	2,74	94,0	2,91	89,3	3,10	84,0	3,32	78,1	3,56
140	111,9	3,38	107,9	3,67	103,4	4,00	98,2	4,39	92,2	4,86
150	127,1	4,17	123,6	4,63	119,6	5,20	114,9	5,90	109,3	6,79
160	143,8	5,12	141,1	5,83	138,1	6,75	134,5	7,95	130,0	9,58
170	161,6	6,20	160,2	7,24	158,5	8,63	156,5	10,55	153,9	13,33
180	180,0	7,36	180,0	8,78	180,0	10,73	180,0	13,52	180,0	17,77

v	$e = 0,80$		$e = 0,85$		$e = 0,90$		$e = 0,95$		$e = 1,00$
	u	P	u	P	u	P	u	P	P
0°	0°,0	0,000	0°,0	0,000	0°,0	0,000	0°,0	0,000	0,000
10	3,3	0,092	2,9	0,091	2,3	0,090	1,6	0,089	0,088
20	6,7	0,187	5,7	0,185	4,6	0,183	3,2	0,180	0,178
30	10,2	0,288	8,7	0,284	7,0	0,281	4,9	0,278	0,274
40	13,8	0,397	11,8	0,392	9,5	0,388	6,7	0,384	0,380
50	17,7	0,518	15,1	0,514	12,2	0,509	8,5	0,505	0,500
60	21,8	0,659	18,7	0,654	15,1	0,650	10,6	0,646	0,642
70	26,3	0,826	22,6	0,823	18,3	0,820	12,8	0,818	0,815
80	31,3	1,031	26,9	1,032	21,8	1,034	15,3	1,035	1,036
90	36,9	1,293	31,8	1,303	25,8	1,313	18,2	1,323	1,333
100	43,3	1,64	37,5	1,67	30,6	1,70	21,6	1,73	1,76
110	50,9	2,12	44,3	2,18	36,3	2,25	25,8	2,32	2,40
120	60,0	2,80	52,5	2,95	43,3	3,10	31,0	3,27	3,46
130	71,1	3,83	62,8	4,14	52,4	4,51	37,9	4,93	5,43
140	85,0	5,42	76,1	6,12	64,4	7,00	47,5	8,13	9,66
150	102,4	7,95	93,5	9,53	81,1	11,8	61,7	15,2	21,1
160	124,2	11,92	116,5	15,5	104,9	21,5	84,5	33,5	66,5
170	150,6	17,67	145,8	25,2	138,3	40,6	122,7	84,9	509
180	180,0	24,84	180,0	38,2	180,0	70,2	180,0	198,7	∞

TABLE IV.

	$e = 1,00$	$e = 1,05$				$e = 1,10$			
v	P	u	u_1	u'	P	u	u_1	u'	P
°			°	°			°	°	
0...	0,000	0,000	0,0	0,0	0,000	0,000	0,0	0,0	0,000
10...	0,088	0,027	1,6	1,6	0,087	0,038	2,2	2,2	0,086
20...	0,178	0,055	3,2	3,2	0,176	0,077	4,4	4,4	0,174
30...	0,274	0,084	4,8	4,8	0,271	0,117	6,7	6,7	0,268
40...	0,380	0,114	6,5	6,5	0,376	0,159	9,1	9,1	0,373
50...	0,500	0,146	8,3	8,4	0,496	0,204	11,6	11,7	0,492
60...	0,642	0,181	10,3	10,3	0,637	0,253	14,4	14,5	0,633
70...	0,815	0,220	12,5	12,6	0,812	0,308	17,4	17,6	0,809
80...	1,036	0,264	14,9	15,1	1,037	0,370	20,8	21,1	1,038
90...	1,333	0,315	17,8	18,0	1,343	0,444	24,6	25,2	1,353
100...	1,76	0,377	21,1	21,5	1,79	0,532	29,2	30,1	1,82
110...	2,40	0,454	25,1	25,8	2,48	0,645	34,6	36,3	2,56
120...	3,46	0,555	30,3	31,4	3,67	0,795	41,4	44,4	3,91
130...	5,43	0,697	37,0	39,1	6,04	1,015	50,2	55,8	6,78
140...	9,66	0,918	46,4	50,8	11,8	1,385	61,9	73,7	15,1
150...	21,1	1,334	60,5	71,3	32,9	2,280	78,3	109,1	68,0
160...	66,5	2,803	83,1	124,7	369				
170...	509								
180...	∞								
		Limite de v : 162°,24				Limite de v : 155°,38			

Supposant d'abord l'orbite elliptique, écrivons l'équation de Képler sous la forme

$$P = \frac{(1-e)\sin u + (u - \sin u)}{4\varepsilon^3},$$

et faisons

$$\sigma = \frac{\sin\frac{u}{2}}{\varepsilon}.$$

D'après la définition de ε, il vient

$$P = \sigma \cos\frac{u}{2} + \lambda^3\sigma^3,$$

en appelant λ^3 la fonction de u égale à $\dfrac{u - \sin u}{4\sin^3\frac{u}{2}}$, qui reste toujours voisine de $\frac{1}{3}$ quand l'angle u est petit, d'après le développement connu

$$u - \sin u = \frac{1}{2}\,\frac{\sin^3 u}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\sin^5 u}{5} + \dots$$

Mais posons plutôt

$$\theta = \tang \frac{u}{2};$$

on a

$$\lambda^3 = \frac{(1+\theta^2)^{\frac{1}{2}}}{2\theta^3}[(1+\theta^2)\operatorname{arc\,tang}\theta - \theta],$$

et comme

$$\operatorname{arc\,tang}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \frac{\theta^7}{7} + \ldots,$$

il vient

$$\lambda^3 = (1+\theta^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3} - \frac{\theta^2}{3.5} + \frac{\theta^4}{5.7} - \frac{\theta^6}{7.9} + \ldots\right).$$

Posons encore

$$\lambda = \beta(1+\theta^2)^{\frac{1}{10}},$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\beta^3 &= (1+\theta^2)^{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{3} - \frac{\theta^2}{3.5} + \frac{\theta^4}{5.7} - \frac{\theta^6}{7.9} + \ldots\right)\\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{175}\theta^4 + \frac{88}{7875}\theta^6 - \frac{1409}{144375}\theta^8 + \ldots\end{aligned}$$

et

$$\log\beta = \log\frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \operatorname{mod}\left(\frac{2}{175}\theta^4 - \frac{88}{7875}\theta^6 + \frac{10061}{1010625}\theta^8 - \ldots\right).$$

On voit que cette fonction ne diffère d'une constante que d'une quantité du quatrième ordre par rapport à θ, multipliée d'ailleurs par un facteur numérique petit, et, par suite, elle est facile à réduire en une table très courte. Finalement, en n'oubliant pas que

$$1+\theta^2 = \operatorname{séc}^2\frac{u}{2},$$

l'équation de Képler prend ici la forme

$$\text{(10)}\qquad P = \sigma\cos\frac{u}{2} + \left(\sigma\beta\operatorname{séc}^{\frac{1}{5}}\frac{u}{2}\right)^3.$$

Dans l'hypothèse du mouvement hyperbolique, il est clair que l'on aurait de même, avec les notations adoptées pour ce cas,

$$\text{(11)}\qquad P = \sigma\operatorname{séc}\frac{u'}{2} + \left(\sigma\beta'\cos^{\frac{1}{5}}\frac{u'}{2}\right)^3,$$

en faisant

$$\sigma = \frac{\tang \frac{u'}{2}}{\varepsilon}, \qquad \theta = \sin \frac{u'}{2},$$

et appelant β' la fonction β dans laquelle on change θ^2 en $-\theta^2$.

La Table V des pages 87 et 88 fournit les valeurs à sept décimales de $\log \beta$ et $\log \beta'$; l'argument de la Table est l'angle $\frac{u}{2}$ ou $\frac{u'}{2}$, qui varie depuis 0° jusqu'à 40°, de degré en degré jusqu'à 5°, de demi-degré en demi-degré jusqu'à 25°, et finalement de tiers en tiers de degré. L'interpolation de la Table se fait aisément, surtout dans le début, et c'est alors que son usage sera le plus fréquent. Les nombres de la Table sont, comme d'habitude, exacts à une demi-unité près du dernier ordre décimal.

Supposons donnée l'anomalie vraie, et faisons

$$\omega = \text{séc}\,\psi \tang \frac{v}{2};$$

en vertu de la définition de l'angle ψ qui donne $\cos\psi = \sqrt{\frac{1+e}{2}}$, et d'après la valeur de σ, on a

$$\theta = \omega\varepsilon, \qquad \sigma = \omega \cos \frac{u}{2};$$

on a donc pour calculer P et r l'ensemble de formules

$$\varepsilon = \sin\psi = \sqrt{\frac{1-e}{2}},$$

$$\omega = \text{séc}\,\psi \tang \frac{v}{2}, \qquad \tang \frac{u}{2} = \omega\varepsilon, \qquad \sigma = \omega \cos \frac{u}{2},$$

$$\text{P} = \sigma \cos \frac{u}{2} + \left(\sigma\beta\, \text{séc}^{\frac{1}{3}} \frac{u}{2}\right)^3,$$

$$\frac{q}{r} = \text{séc}^2 \frac{u}{2} \cos^2 \frac{v}{2}.$$

Le calcul est bien aisé, car u étant assez petit, le logarithme de $\cos \frac{u}{2}$ se prend à vue dans les Tables en face de celui de $\tang \frac{u}{2}$, et il suffit de déterminer l'angle $\frac{u}{2}$ avec la faible approximation nécessaire pour assurer l'interpolation de la Table V.

TABLE V.

$\frac{u}{2}$ ou $\frac{u'}{2}$	Log β	Différence	Log β′	Différence
0° 0′	$\bar{1}$,8409596		$\bar{1}$;8409596	
1. 0	596		596	
2. 0	596		596	
3. 0	595		595	
4. 0	595		595	
5. 0	593		593	
30	592	— 1	592	— 1
6. 0	590	2	590	2
30	588	2	588	2
7. 0	585	3	585	3
30	581	4	581	4
8. 0	577	4	577	4
30	572	5	572	5
9. 0	565	7	565	7
30	558	7	558	7
10. 0	549	9	549	9
30	539	10	539	10
11. 0	527	12	528	11
30	514	13	514	14
12. 0	499	15	499	15
30	481	18	482	17
13. 0	462	19	462	20
30	440	22	440	22
14. 0	415	25	416	24
30	387	28	388	28
15. 0	357	30	358	30
30	323	34	324	34
16. 0	285	38	286	38
30	244	41	245	41
17. 0	199	45	200	45
30	149	50	151	49
18 0	095	54	097	54
30	$\bar{1}$,8409036	59	$\bar{1}$,8409038	59
19. 0	$\bar{1}$,8408971	65	$\bar{1}$,8408974	64
30	901	70	905	69
20. 0	826	75	830	75
30	744	82	749	81
21. 0	655	89	661	88
30	560	95	567	94
22. 0	458	102	465	102
30	347	111	356	109
23. 0	229	118	239	117
30	$\bar{1}$,8408102	127	$\bar{1}$,8408114	125
24. 0	$\bar{1}$,8407967	135	$\bar{1}$,8407980	134
30	822	145	837	143
25. 0	$\bar{1}$,8407667	—155	$\bar{1}$,8407684	—153

TABLE V (*suite*).

$\frac{u}{2}$ ou $\frac{u'}{2}$	Log β	Différence	Log β′	Différence
25° 0′	$\bar{1}$,8407667	—109	$\bar{1}$,8407684	—108
20	7558	114	7576	112
40	7444	118	7464	117
26. 0	7326	123	7347	121
20	7203	129	7226	127
40	7074	134	7099	132
27. 0	6940	140	6967	137
20	6800	145	6830	143
40	6655	151	6687	149
28. 0	6504	157	6538	154
20	6347	163	6384	160
40	6184	169	6224	167
29. 0	6015	176	6057	173
20	5839	183	5884	179
40	5656	190	5705	187
30. 0	5466	197	5518	193
20	5269	204	5325	200
40	5065	212	5125	207
31. 0	4853	219	4918	215
20	4634	228	4703	223
40	4406	236	4480	231
32. 0	4170	244	4249	239
20	3926	253	4010	247
40	3673	261	3763	255
33. 0	3412	271	3508	265
20	3141	280	3243	273
40	2861	290	2970	283
34. 0	2571	300	2687	292
20	2271	310	2395	302
40	1961	320	2093	313
35. 0	1641	331	1780	322
20	1310	342	1458	333
40	0968	354	1125	343
36. 0	0614	365	0782	355
20	$\bar{1}$,8400249	377	0427	366
40	$\bar{1}$,8399872	389	$\bar{1}$,8400061	378
37. 0	9483	401	$\bar{1}$,8399683	390
20	9082	415	9293	401
40	8667	428	8892	415
38. 0	8239	441	8477	427
20	7798	455	8050	441
40	7343	469	7609	454
39. 0	6874	484	7155	468
20	6390	499	6687	482
40	5891	—515	6205	—496
40. 0	$\bar{1}$,8395376		$\bar{1}$,8395709	

Quant au logarithme de $\text{séc}^{\frac{1}{3}} \frac{u}{2}$, il se forme immédiatement, de sorte que l'on a, sans aucune peine, le logarithme du produit qui doit être élevé au cube pour compléter l'expression de P.

Dans le cas du mouvement hyperbolique, le groupe de formules précédent se change en

$$\varepsilon = \text{tang}\,\psi' = \sqrt{\frac{e-1}{2}},$$

$$\omega = \cos\psi' \,\text{tang}\,\frac{v}{2}, \qquad \sin\frac{u'}{2} = \omega\varepsilon, \qquad \sigma = \omega\,\text{séc}\,\frac{u'}{2},$$

$$P = \sigma\,\text{séc}\,\frac{u'}{2} + \left(\sigma\beta' \cos^{\frac{1}{3}} \frac{u'}{2}\right)^3,$$

$$\frac{q}{r} = \cos^2\frac{u'}{2}\cos^2\frac{v}{2},$$

et le calcul est en tout semblable au précédent.

Exemple I. — On donne (¹)

$$e = 0{,}96764567, \qquad \log q = \bar{1}{,}7656500,$$

d'où d'abord les constantes

$$\varepsilon = \sin\psi = [\bar{1}{,}104451], \qquad \text{séc}\,\psi = [0{,}0035415],$$

$$\frac{k}{\sqrt{2q^3}} = [\bar{2}{,}4365914].$$

Soit $v = 100°$; il vient successivement

$$\omega = [0{,}0797280], \qquad \text{tang}\,\frac{u}{2} = [\bar{1}{,}184179], \qquad \frac{u}{2} = 8°41',$$

$$\text{séc}\,\frac{u}{2} = [0{,}0050129], \qquad \beta = [\bar{1}{,}8409569],$$

$$\sigma = [0{,}0747151], \qquad \sigma\beta\,\text{séc}^{\frac{1}{3}}\,\frac{u}{2} = [\bar{1}{,}9166746], \qquad P = [0{,}2396659],$$

et finalement

$$t - T = 63{,}54400, \qquad \log r = 0{,}1394892.$$

Exemple II. — On donne (²)

$$e = 1{,}2618820, \qquad \log q = 0{,}0201657;$$

(¹) *Cf.* C.-F. GAUSS, *Theoria motus*, art. 38, 43.

(²) *Cf.* C.-F. GAUSS, *Theoria motus*, art. 23, 24, 26, 46.

d'où les constantes

$$\varepsilon = \operatorname{tang}\psi' = [\bar{1},5585378], \qquad \cos\psi' = [\bar{1},9732800],$$
$$\frac{k}{\sqrt{2q^3}} = [\bar{2},0548179].$$

Soit $v = 18^\circ 51'$; on a

$$\omega = [\bar{1},1933809], \qquad \sin\frac{u'}{2} = [\bar{2},751919], \qquad \frac{u'}{2} = 3^\circ 14',$$
$$\operatorname{séc}\frac{u'}{2} = [0,0006939], \qquad \beta' = [\bar{1},8409595], \qquad \sigma = [\bar{1},1940748],$$
$$\sigma\beta'\cos^{\frac{1}{3}}\frac{u'}{2} = [\bar{1},0348955], \qquad P = [\bar{1},1982838],$$

et finalement

$$t - T = 13,91445, \qquad \log r = 0,0333587.$$

Mais c'est le problème inverse que nous avons à résoudre. On y arrive en partant d'une valeur approchée de v; si P' est la valeur correspondante, tandis que P est la valeur donnée, et que l'on fasse

$$P - P' = dP \qquad \text{ou bien} \qquad \log P - \log P' = d(\log P),$$

on a une valeur plus exacte de v en appliquant à la valeur initiale la correction

$$dv = 2R\left(\frac{q}{r}\right)^2 \cos\psi\, dP = \frac{2R}{\text{mod}}\left(\frac{q}{r}\right)^2 \cos\psi\, P\, d(\log P);$$

et s'il n'y a pas de nouvelle approximation à faire, on calculera avec précision la valeur de $\log r$ qui correspond à la valeur approchée de v, pour lui faire subir finalement la correction

$$d(\log r) = \frac{\text{mod}}{R}\, e\left(\sigma\cos\frac{u}{2}\right) \operatorname{séc}\psi\, dv,$$

en remarquant que $\sigma\cos\frac{u}{2}$ est précisément le premier terme de l'expression de P.

Dans le cas du mouvement hyperbolique, ces diverses formules deviennent

$$dv = 2R\left(\frac{q}{r}\right)^2 \operatorname{séc}\psi'\, dP = \frac{2R}{\text{mod}}\left(\frac{q}{r}\right)^2 \operatorname{séc}\psi' P\, d(\log P),$$
$$d(\log r) = \frac{\text{mod}}{R}\, e\left(\sigma\operatorname{séc}\frac{u'}{2}\right) \cos\psi'\, dv.$$

Comme précédemment, il est bien rare que l'on ne connaisse pas une valeur de v suffisamment approchée pour permettre d'appliquer immédiatement ce qui vient d'être dit en dernier lieu, surtout quand on ne recherche pas une extrême précision. Si cependant on n'avait aucun renseignement sur la valeur de v, on arriverait au même résultat à l'aide de quelques essais, en s'aidant par exemple de la Table III ou IV, où l'on peut remarquer que si v n'est pas très grand, sa valeur diffère peu de celle qui convient au mouvement parabolique, P restant constant.

Exemple I. — Reprenant l'orbite de l'exemple I précédent, soit donné $t - T = 63,54400$, de sorte que

$$\log P = 0,2396659 \quad \text{et} \quad P = 1,736.$$

La Table indique pour v une valeur voisine de $100°$, mais partons de $v = 96°$, avec un calcul à quatre décimales; on trouve $P' = 1,554$, de sorte que $dv = 4°,3$. Cette valeur doit être trop grande, comme nous l'avons déjà vu dans un cas semblable, et l'on serait naturellement conduit à partir de la valeur $v = 100°$, qui est exacte. Pour montrer l'application des formules, partons de $v = 100°0'20''$; on trouve

$$d(\log P) = -0,0000684, \qquad \log r = 0,1395374;$$

on en déduit

$$dv = -20'',00, \qquad d(\log r) = -0,0000482,$$

et par suite

$$v = 100°0'0'',00, \qquad \log r = 0,1394892.$$

En réalité, on voit que l'erreur sur v pouvait atteindre plusieurs centièmes de seconde.

Exemple II. — Dans l'orbite hyperbolique de l'exemple II précédent, on donne

$$t - T = 65,41234,$$

d'où

$$\log P = [\bar{1},8704776], \qquad P = 0,7421.$$

La Table IV extrapolée montre que $67°$ doit être une valeur approchée de v; supposons que le calcul d'une éphéméride, par exemple, ait conduit à prendre la valeur initiale $v = 67°2'40''$. On trouve alors

$$d(\log P) = 0,0000612, \qquad \log r = 0,2008215,$$

d'où

$$dv = 19'',96,$$
$$d(\log r) = 0,0000327,$$

et finalement

$$v = 67^\circ 2' 59'',96, \qquad \log r = 0,2008542.$$

Ici encore l'erreur sur v peut atteindre plusieurs centièmes de seconde.

23. L'anomalie vraie et le rayon vecteur dépendent des éléments intrinsèques a ou n, e, M_0, de l'orbite, supposée elliptique : il est nécessaire de savoir déterminer leurs variations infiniment petites, lorsque ces éléments viennent eux-mêmes à varier. En d'autres termes, il faut calculer les dérivées partielles de v et r par rapport à n, e, M_0, ou, ce qui revient au même, les différentielles totales dv et dr lorsque n, e, M_0 sont variables indépendantes.

Considérons d'abord v et r comme fonctions de a, e et de l'anomalie moyenne M; on a

$$dv = \frac{\partial v}{\partial e} de + \frac{\partial v}{\partial \mathrm{M}} d\mathrm{M},$$
$$dr = \frac{r}{a} da + \frac{\partial r}{\partial e} de + \frac{\partial r}{\partial \mathrm{M}} d\mathrm{M},$$

car v ne dépend pas de a, et il en est de même du quotient $\frac{r}{a}$.

D'après ce que nous avons déjà vu, on a

$$\frac{\partial v}{\partial \mathrm{M}} = \frac{a^2}{r^2} \cos\varphi, \qquad \frac{\partial r}{\partial \mathrm{M}} = \frac{a^2}{r} e \sin u;$$

éliminant $\sin u$ par la première des formules (1), il vient

$$\frac{\partial r}{\partial \mathrm{M}} = a \operatorname{tang}\varphi \sin v.$$

Les mêmes formules (1) différentiées par rapport à e donnent

$$\sin v \frac{\partial r}{\partial e} + r \cos v \frac{\partial r}{\partial e} = a \cos\varphi \cos u \frac{\partial u}{\partial e} - a \operatorname{tang}\varphi \sin u,$$
$$\cos v \frac{\partial r}{\partial e} - r \sin v \frac{\partial v}{\partial e} = - a \sin u \frac{\partial u}{\partial e} - a,$$

tandis que, par l'équation de Képler, on a

$$\frac{\partial u}{\partial e}(1 - e \cos u) = \sin u;$$

les seconds membres des relations précédentes deviennent alors respectivement, en profitant toujours des relations (1),

$$r\,\text{séc}^2\varphi \sin v \cos v \qquad \text{et} \qquad -r\,\text{séc}^2\varphi \sin^2 v - a;$$

par suite

$$\frac{\partial v}{\partial e} = \sin v\left(\frac{a}{r} + \text{séc}^2\varphi\right), \qquad \frac{\partial r}{\partial e} = -a\cos v.$$

Pour condenser en une seule formule qui nous sera de la plus grande utilité les expressions de dv et de dr, désignons par χ un angle arbitraire, et formons

$$d[r\sin(v+\chi)] = \sin(v+\chi)\,dr + r\cos(v+\chi)\,dv.$$

Le coefficient de da au second membre est $\frac{r}{a}\sin(v+\chi)$; celui de de est

$$r\sin v\,\text{séc}^2\varphi\cos(v+\chi) - a\sin\chi$$

ou encore

$$a\,\text{séc}\,\varphi[\sin u\cos(v+\chi) - \cos\varphi\sin\chi].$$

Enfin le coefficient de $d\text{M}$ est

$$a\,\text{tang}\,\varphi\sin v\sin(v+\chi) + \frac{a^2}{r}\cos\varphi\cos(v+\chi);$$

en remplaçant $\frac{a}{r}$ par $\text{séc}^2\varphi\,(1+\sin\varphi\cos v)$, il devient

$$a\,\text{séc}\,\varphi[\cos(v+\chi) + \sin\varphi\cos\chi].$$

Finalement donc

$$(12)\quad \begin{aligned} d[r\sin(v+\chi)] &= \frac{r}{a}\sin(v+\chi)\,da + a\,\text{séc}\,\varphi[\sin u\cos(v+\chi) - \cos\varphi\sin\chi]\,de \\ &\quad + a\,\text{séc}\,\varphi\,[\cos(v+\chi) + \sin\varphi\cos\chi]\,d\text{M}. \end{aligned}$$

En faisant $\chi = -v$, ou $\chi = \frac{\pi}{2} - v$ dans le second membre de cette formule générale, on retrouve les valeurs de $r\,dv$ ou de dr.

Pour introduire les variables définitives n, φ, M_0 que l'on adopte d'habitude, il suffit d'observer que

$$\frac{da}{a} = -\frac{2}{3}\frac{dn}{n}, \qquad de = \cos\varphi\,d\varphi, \qquad d\text{M} = (t-t_0)\,dn + d\text{M}_0,$$

de sorte qu'il vient alors

$$(13)\quad d[r\sin(v+\chi)] = a\,\text{séc}\,\varphi[\cos(v+\chi)+\sin\varphi\cos\chi][dM_0+(t-t_0)\,dn]$$
$$+a[\sin u\cos(v+\chi)-\cos\varphi\sin\chi]\,d\varphi$$
$$-\frac{2}{3}a\frac{r\sqrt{a}}{k}\sin(v+\chi)\,dn,$$

et il est facile de réunir ensemble les deux termes en dn.

Dans le cas d'une orbite à forte excentricité, il convient d'adopter comme éléments fondamentaux l'époque T d'un passage au périhélie, la distance périhélie q, et l'excentricité, ou plutôt l'inverse a' du demi-grand axe On a alors

$$aa'=1,\qquad qa'=1-e,\qquad M=n(t-T),$$

de sorte que

$$da=-a^2\,da',\qquad de=-a'\,dq-q\,da',$$
$$dM=-ka'^{\frac{3}{2}}\,dT+\frac{3}{2}ka'^{\frac{1}{2}}(t-T)\,da'.$$

Portant ces valeurs dans la formule (12), introduisant le paramètre p égal à $a\cos^2\varphi$ ou à $q(1+e)$ et remplaçant $\sin u$ par $\frac{r}{p}\cos\varphi\,\sin v$, il vient immédiatement

$$(14)\quad d[r\sin(v+\chi)]$$
$$=-\frac{k}{\sqrt{p}}[\cos(v+\chi)+e\cos\chi]\,dT+\left[\sin\chi-\frac{r}{p}\sin v\cos(v+\chi)\right]dq$$
$$+a\,da'\left\{-r\sin(v+\chi)+q\left[\sin\chi-\frac{r}{p}\sin v\cos(v+\chi)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{3}{2}\frac{k}{\sqrt{p}}(t-T)[\cos(v+\chi)+e\cos\chi]\right\}.$$

Le coefficient de da' dans cette formule contient le facteur a, qui devient très grand lorsque e se rapproche beaucoup de l'unité; le second facteur doit donc devenir en même temps très petit, et s'annuler à la limite dans le cas de la parabole; par suite, il faut transformer le coefficient de da' de façon à faire disparaître la difficulté de calcul qui se présente ainsi, et à permettre le passage à la limite qui conduira au cas de la parabole.

Mettant d'abord $\frac{r}{1+e}$ en facteur, remplaçant $\frac{p}{r}$ par sa valeur

$1 + e\cos v$ dans le coefficient de $\sin\chi$, et observant que l'on a

$$k(t - T) = \frac{q^{\frac{3}{2}} M}{(1-e)^{\frac{3}{2}}},$$

le coefficient de da' devient

$$\frac{q^2}{1-e}\frac{r}{p}\left\{\sin\chi - \sin(v+\chi) + \left[\frac{3}{2}\frac{p}{r}\frac{M}{(1-e)\sqrt{1-e^2}} - \sin v\right][\cos(v+\chi) + e\cos\chi]\right\}.$$

Mais on a

$$M = u - e\sin u = (1-e)\sin u + (u - \sin u),$$

$$\frac{p}{r} = \frac{\sin v}{\sin u}\sqrt{1-e^2},$$

et de plus l'identité

$$\sin(v+\chi) - \sin\chi = (1-e)\tan\frac{v}{2}\cos\chi + \tan\frac{v}{2}[\cos(v+\chi) + e\cos\chi];$$

l'expression précédente peut alors s'écrire

$$\frac{q^2}{2(1-e)}\frac{r}{p}\sin v\left\{-(1-e)\sec^2\frac{v}{2}\cos\chi + \left[3\frac{u-\sin u}{(1-e)\sin u} - \tan^2\frac{v}{2}\right][\cos(v+\chi) + e\cos\chi]\right\}.$$

Dans le diviseur de $u - \sin u$, remplaçons encore $1 - e$ par

$$(1+e)\tan^2\frac{u}{2}\cot^2\frac{v}{2};$$

puis remarquons que la fonction $\dfrac{3(u - \sin u)}{\sin u \tan^2\frac{u}{2}}$ se développe comme la fonction λ^3 envisagée au numéro précédent suivant les puissances de $\tan^2\frac{u}{2}$, en se réduisant à 2 pour $u = 0$, de sorte qu'on peut poser

$$\frac{3}{2}\frac{u - \sin u}{\sin u \tan^2\frac{u}{2}} = 1 - s\tan^2\frac{u}{2} = 1 - s\frac{1-e}{1+e}\tan^2\frac{v}{2},$$

en désignant par s une fonction de u sur laquelle nous allons revenir.

On a alors

$$3\frac{u - \sin u}{(1-e)\sin u} - \tan^2\frac{v}{2} = \frac{1-e}{1+e}\tan^2\frac{v}{2}\left(1 - 2s\frac{\tan^2\frac{v}{2}}{1+e}\right),$$

et le coefficient de da' prend enfin une forme qui ne prête plus à aucune difficulté, de sorte que la formule (14) devient

$$(15)\quad \begin{aligned} d[r\sin(v+\chi)] &= -\frac{k}{\sqrt{p}}[\cos(v+\chi)+e\cos\chi]\,dT + \left[\sin\chi - \frac{r}{p}\sin v\cos(v+\chi)\right]dq \\ &\quad + \frac{q^2}{2}\frac{r}{p}\sin v\left\{-\operatorname{séc}^2\frac{v}{2}\cos\chi \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\operatorname{tang}^2\frac{v}{2}}{1+e}\left(1-2s\frac{\operatorname{tang}^2\frac{v}{2}}{1+e}\right)[\cos(v+\chi)+e\cos\chi]\right\}da'. \end{aligned}$$

En conservant les mêmes notations que précédemment, on a

$$\frac{3}{2}\,\frac{u-\sin u}{\sin u\operatorname{tang}^2\frac{u}{2}} = 3\lambda^3\cos\frac{u}{2} = 1 - \frac{\theta^2}{5} + \frac{3\theta^4}{5.7} - \frac{3\theta^6}{7.9} + \ldots,$$

et par suite

$$s = \frac{1}{5} - \frac{3\theta^2}{5.7} + \frac{3\theta^4}{7.9} - \frac{3\theta^6}{9.11} + \ldots;$$

de sorte que si l'on pose

$$s = m\cos^{\frac{6}{7}}\frac{u}{2},$$

la fonction m, égale à $\frac{1}{5} - \frac{2\theta^4}{147} + \ldots$, différera fort peu de $\frac{1}{5}$ tant que l'angle $\frac{u}{2}$ restera médiocrement grand.

La formule (15) convient aussi bien au cas d'une orbite hyperbolique, où l'on a toujours $q = a(1-e)$, c'est-à-dire que a est le demi-axe transverse pris négativement; en faisant comme plus haut dans ce cas $\theta = \sin\frac{u'}{2}$, on a alors

$$s = \frac{1}{5} + \frac{3\theta^2}{5.7} + \frac{3\theta^4}{7.9} + \frac{3\theta^6}{9.11} + \ldots,$$

et l'on peut poser

$$s = m'\operatorname{séc}^{\frac{6}{7}}\frac{u'}{2},$$

la fonction m' étant analogue à m, et n'en différant que par le changement de θ^2 en $-\theta^2$.

La Table VI de la page 98, analogue à la Table V, fournit les valeurs à cinq décimales de $\log m$ et $\log m'$, en fonction de l'argument $\frac{u}{2}$ ou $\frac{u'}{2}$: cette approximation est plus que suffisante pour l'usage.

Dans le cas de la parabole, la formule (15) convient encore : il suffit d'y faire $e = 1$, $s = \frac{1}{5}$; et si l'on veut substituer e à a', il n'y a qu'à remplacer da' par $-\frac{de}{q}$, puisque l'on a ici $a' = 0$.

En mettant en évidence l'angle $\frac{v}{2} + \chi$ au lieu de $v + \chi$, remplaçant p par $2q$ et r par $q\,\text{séc}^2\frac{v}{2}$, on obtient sans peine la forme définitive :

$$
\begin{aligned}
(16) \quad d[r\sin(v+\chi)] = & -\frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{q}}\cos\frac{v}{2}\cos\left(\frac{v}{2}+\chi\right)d\mathrm{T} \\
& + \text{séc}\frac{v}{2}\left[\sin\left(\frac{v}{2}+\chi\right) - \sin v\cos\left(\frac{v}{2}+\chi\right)\right]dq \\
& + \frac{q}{2}\sin\frac{v}{2}\left[\tan\frac{v}{2}\,\text{séc}^2\frac{v}{2}\sin\left(\frac{v}{2}+\chi\right)\right. \\
& \qquad \left. + \left(1+\frac{1}{5}\tan^4\frac{v}{2}\right)\cos\left(\frac{v}{2}+\chi\right)\right]de.
\end{aligned}
$$

que nous appellerons ρ, par l'application des formules suivantes :

$$x' = \rho\cos\beta'\cos\lambda' = x + R\cos B\cos L,$$
$$y' = \rho\cos\beta'\sin\lambda' = y + R\cos B\sin L,$$
$$z' = \rho\sin\beta' = z + R\sin B,$$

où L, B, R sont la longitude, la latitude toujours très petite, et le rayon vecteur du Soleil, par rapport à la Terre O′ prise comme nouvelle origine des coordonnées.

Si enfin on veut avoir les coordonnées polaires géocentriques équatoriales de M, qui sont, avec la distance ρ, l'ascension droite α et la déclinaison δ, on pourra déduire α et δ de λ' et β' par les formules connues, où ε désigne l'obliquité de l'écliptique,

$$\cos\delta\sin\alpha = -\sin\varepsilon\sin\beta' + \cos\varepsilon\cos\beta'\sin\lambda',$$
$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta'\cos\lambda',$$
$$\sin\delta = \cos\varepsilon\sin\beta' + \sin\varepsilon\cos\beta'\sin\lambda';$$

ces formules peuvent être écrites de la façon suivante, en désignant par φ un angle auxiliaire :

$$\tang\varphi = \frac{z'}{y'} = \frac{\tang\beta'}{\sin\lambda'},$$
$$\tang\alpha = \tang\lambda'\,\mathrm{séc}\,\varphi\cos(\varphi + \varepsilon),$$
$$\tang\delta = \sin\alpha\tang(\varphi + \varepsilon),$$

et il est aisé d'éviter toute ambiguïté.

Mais, presque toujours, quand il s'agit d'un astéroïde ou d'une comète, on détermine directement α, δ, ρ sans passer par l'intermédiaire des coordonnées écliptiques. On peut y arriver comme ci-dessus en prenant comme plan fondamental le plan de l'équateur, et par conséquent en déterminant les éléments ϑ_1, i_1, ω_1, analogues à ϑ, i, ω relatifs à ce plan, ce qui n'offre aucune difficulté, puisqu'il suffit de résoudre le triangle sphérique déterminé par les plans de l'équateur, de l'écliptique et de l'orbite; on a ainsi les formules

$$\sin i_1 \sin\vartheta_1 = \sin i\sin\vartheta,$$
$$\sin i_1 \cos\vartheta_1 = \sin\varepsilon\cos i + \cos\varepsilon\sin i\cos\vartheta,$$
$$\cos i_1 = \cos\varepsilon\cos i - \sin\varepsilon\sin i\cos\vartheta,$$
$$\sin i_1 \sin(\omega_1 - \omega) = \sin\varepsilon\sin\vartheta,$$
$$\sin i_1 \cos(\omega_1 - \omega) = \cos\varepsilon\sin i + \sin\varepsilon\cos i\cos\vartheta.$$

On peut aussi bien, comme nous allons le montrer maintenant, conserver les éléments écliptiques, dont l'emploi est généralement préférable. Considérons le système d'axes $O\xi\eta\zeta$, tel que $O\xi$ et $O\zeta$ soient dirigés respectivement suivant le rayon vecteur OM et vers le pôle p de l'orbite, de sorte que le plan $O\xi\eta$ coïncide avec celui de l'orbite. Si Os est une direction fixe quelconque, appelons f l'angle $\widehat{O\zeta, Os}$, et $\frac{\pi}{2} - F$ l'angle que fait le plan $O\zeta A$ avec le plan $O\zeta s$, en désignant par A le périhélie de l'orbite; l'angle du plan $O\zeta\xi$ avec le plan $O\zeta s$ est $\frac{\pi}{2} - v - F$, et l'on a par suite

$$\cos\widehat{O\xi, Os} = \sin f \sin(v + F),$$
$$\cos\widehat{O\eta, Os} = \sin f \cos(v + F),$$
$$\cos\widehat{O\zeta, Os} = \cos f.$$

Soit alors $Ox_1y_1z_1$ le système des axes équatoriaux, tel par conséquent que Ox_1 coïncide avec Ox, et que Oz_1 soit dirigé vers le pôle de l'équateur. Appelons a, A, b, B, c, C, les valeurs des constantes f, F qui correspondent respectivement aux directions Ox_1, Oy_1, Oz_1 : nous reviendrons plus loin sur leur détermination.

Si x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées rectangulaires équatoriales héliocentriques de M, on a simplement, d'après ce qui précède :

$$x_1 = r \sin a \sin(v + A),$$
$$y_1 = r \sin b \sin(v + B),$$
$$z_1 = r \sin c \sin(v + C).$$

Les quantités $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, A, B, C, dont les trois premières sont positives, sont les *constantes équatoriales de Gauss* pour l'orbite considérée.

Si maintenant X, Y, Z sont les coordonnées équatoriales géocentriques du Soleil, fournies par les éphémérides, et si x'_1, y'_1, z'_1 sont les coordonnées équatoriales géocentriques de M, on a finalement

$$x'_1 = \rho \cos\delta \cos\alpha = x_1 + X,$$
$$y'_1 = \rho \cos\delta \sin\alpha = y_1 + Y,$$
$$z'_1 = \rho \sin\delta \qquad = z_1 + Z,$$

et ces formules donnent immédiatement les coordonnées polaires équatoriales géocentriques de M, soit ρ, α, δ.

Quelquefois, quand on peut dans le calcul d'une éphéméride se passer des valeurs de r et de v, on trouve avantage à calculer directement x_1, y_1, z_1 en fonction de l'anomalie excentrique u, l'orbite étant supposée elliptique. Les formules (1) donnent à cet effet, sans confusion possible sur la signification de la lettre a,

$$\begin{aligned} r\sin v &= a\cos\varphi\sin u,\\ r\cos v &= a(\cos u - \sin\varphi); \end{aligned}$$

la forme générale $r\sin f\sin(v+\mathrm{F})$ sous laquelle se présentent les coordonnées x_1, y_1, z_1 devient ainsi

$$f'\sin(u+\mathrm{F}')+f'',$$

en faisant

$$\begin{aligned} f'\sin\mathrm{F}' &= a\sin f\sin\mathrm{F},\\ f'\cos\mathrm{F}' &= a\cos\varphi\sin f\cos\mathrm{F},\\ f'' &= -\sin\varphi(f'\sin\mathrm{F}'). \end{aligned}$$

La position géocentrique obtenue définie par α, δ est rapportée à l'équinoxe et à l'équateur choisis. On la rapportera, s'il y a lieu, à l'équinoxe et à l'équateur vrais de la date pour laquelle est fait le calcul suivant les règles connues. Si les axes de référence choisis sont ceux du commencement d'une année tropique, et que f, g, G soient les constantes bien connues de la réduction au jour pour la précession et la nutation entre cette époque et la date t, on ajoutera à α et δ les corrections

$$\frac{1}{15}[f+g\,\mathrm{tang}\,\delta\sin(\mathrm{G}+\alpha)], \qquad g\cos(\mathrm{G}+\alpha),$$

exprimées la première en secondes de temps, la deuxième en secondes d'arc. Il ne faut pas oublier enfin l'effet de l'aberration : la position géométrique ou vraie de M au temps t est sa position apparente au temps $t+\tau$, en désignant par τ le temps que met la lumière pour parcourir la distance qui sépare le point M au temps t de la Terre O' au temps $t+\tau$; τ est le temps d'aberration, toujours petit, que l'on peut sans inconvénient exprimer en secondes de temps par la formule

$$\tau = \rho\times 498{,}38 = \rho[2{,}69756],$$

ou, en fraction de jour, par

$$\tau = \rho[\bar{3}{,}76105].$$

Le nombre $498^s,38$ pour l'*équation de la lumière* correspond à la constante $20'',47$ de l'aberration.

Si l'on veut passer de la position vraie (α, δ) de l'époque t à la position apparente de la même époque, et que l'on appelle $d\alpha$, $d\delta$, les variations de α et δ pour un jour à ce moment, il suffira, en raison de la petitesse de τ, d'appliquer à α et à δ les corrections

$$-\rho\, d\alpha[\bar{3},76105], \qquad -\rho\, d\delta[\bar{3},76105].$$

25. Revenons aux constantes de Gauss, qui sont équivalentes dans leur ensemble aux trois éléments d'orientation ϑ, i, ω et dont il y a le plus grand intérêt à donner les valeurs en même temps que celles de ces éléments.

Pour les calculer, observons d'abord que si deux directions quelconques Os, Os' ont respectivement pour longitudes λ et λ', pour latitudes β et β', on a

$$\cos \widehat{Os, Os'} = \sin\beta \sin\beta' + \cos\beta \cos\beta' \cos(\lambda - \lambda').$$

Plaçons alors le point M au nœud ascendant N de l'orbite, de sorte que $v = -\omega$, et désignons par $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ le système général $O\xi\eta\zeta$ dans cette position particulière. Les longitudes et latitudes des axes Ox_1, Oy_1, Oz_1, $O\xi_0$, $O\eta_0$, $O\zeta_0$ sont données par le tableau suivant :

	Ox_1	Oy_1	Oz_1	$O\xi_0$	$O\eta_0$	$O\zeta_0$
λ......	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	ϑ	$\vartheta + \frac{\pi}{2}$	$\vartheta - \frac{\pi}{2}$
β......	0	$-\varepsilon$	$\frac{\pi}{2} - \varepsilon$	0	i	$\frac{\pi}{2} - i$

et par suite on a immédiatement :

$$\begin{aligned}
\cos \widehat{x_1 \xi_0} &= \sin a \sin(A - \omega) = \cos\vartheta, \\
\cos \widehat{x_1 \eta_0} &= \sin a \cos(A - \omega) = -\cos i \sin\vartheta, \\
\cos \widehat{x_1 \zeta_0} &= \cos a \qquad\qquad\quad\;\; = \sin i \sin\vartheta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos \widehat{y_1 \xi_0} &= \sin b \sin(B - \omega) = \cos\varepsilon \sin\vartheta, \\
\cos \widehat{y_1 \eta_0} &= \sin b \cos(B - \omega) = -\sin\varepsilon \sin i + \cos\varepsilon \cos i \cos\vartheta, \\
\cos \widehat{y_1 \zeta_0} &= \cos b \qquad\qquad\quad\;\; = -\sin\varepsilon \cos i - \sin\varepsilon \sin i \cos\vartheta,
\end{aligned}$$

et

$$\cos \widehat{z_1 \xi_0} = \sin c \sin(C - \omega) = \sin \varepsilon \sin \vartheta,$$
$$\cos \widehat{z_1 \eta_0} = \sin c \cos(C - \omega) = \cos \varepsilon \sin i + \sin \varepsilon \cos i \cos \vartheta,$$
$$\cos \widehat{z_1 \zeta_0} = \cos c = \cos \varepsilon \cos i - \sin \varepsilon \sin i \cos \vartheta.$$

Ces formules permettent le calcul des constantes de Gauss de la façon la plus simple ; en faisant

$$n \sin N = \sin i, \qquad n \cos N = \cos i \cos \vartheta,$$

on a

$$\sin a \sin(A - \omega) = \cos \vartheta,$$
$$\sin a \cos(A - \omega) = - \cos i \sin \vartheta,$$
$$\sin b \sin(B - \omega) = \cos \varepsilon \sin \vartheta,$$
$$\sin b \cos(B - \omega) = n \cos(N + \varepsilon),$$
$$\sin c \sin(C - \omega) = \sin \varepsilon \sin \vartheta,$$
$$\sin c \cos(C - \omega) = n \sin(N + \varepsilon);$$

et l'on peut généralement laisser de côté le calcul direct de $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, ou du moins lui donner une moindre précision. Si l'on employait les éléments équatoriaux ϑ_1, i_1, ω_1, on aurait les mêmes formules, mais plus simples : il suffirait en effet d'affecter ϑ, i, ω de l'indice 1, et de remplacer ε par zéro; en particulier, par suite, il viendrait

$$C = \omega_1, \qquad \sin c = \sin i_1.$$

Les neuf quantités

$$\sin a \sin(v + A), \quad \sin a \cos(v + A), \quad \cos a, \quad \ldots$$

sont les cosinus des angles que font deux à deux les arêtes de deux trièdres trirectangles, et par suite il existe entre elles de nombreuses relations bien connues ; c'est ainsi par exemple que l'on a

$$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 2;$$

et aussi

$$\cos a = \begin{vmatrix} \sin b \sin(v + B) & \sin c \sin(v + C) \\ \sin b \cos(v + B) & \sin c \cos(v + C) \end{vmatrix} = \sin b \sin c \sin(B - C),$$

ainsi que les formules analogues.

Comme on a aussi, d'après ce qui précède,

$$\cos a = - \operatorname{tang} i \sin a \cos(A - \omega),$$

on voit qu'on peut employer comme vérification du calcul des constantes de Gauss la formule simple

$$\operatorname{tang} i = \frac{\sin b \sin c \sin(C - B)}{\sin a \cos(A - \omega)},$$

et il serait facile de trouver bien d'autres vérifications d'après les mêmes principes.

Connaissant les constantes de Gauss, on peut en déduire inversement les éléments équatoriaux ϑ_1, i_1, ω_1 ou les éléments écliptiques ϑ, i, ω. Le calcul de ϑ_1, i_1, ω_1 est immédiat, et l'on peut ensuite passer à ϑ, i, ω par les formules mêmes écrites ci-dessus, qui donnent ϑ_1, i_1, ω_1 en fonction de ϑ, i, ω : il suffit d'y permuter les lettres affectées de l'indice 1 avec celles sans indice, et en même temps de changer ε en $-\varepsilon$. Mais on peut aussi bien déterminer ϑ, i, ω directement : on a en effet

$$\begin{aligned}\sin i &= \cos\varepsilon \sin c \cos(C - \omega) - \sin\varepsilon \sin b \cos(B - \omega),\\ 0 &= \cos\varepsilon \sin c \sin(C - \omega) - \sin\varepsilon \sin b \sin(B - \omega),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\sin i \sin\omega &= \cos\varepsilon \sin c \sin C - \sin\varepsilon \sin b \sin B,\\ \sin i \cos\omega &= \cos\varepsilon \sin c \cos C - \sin\varepsilon \sin b \cos B;\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\sin\vartheta &= \frac{\sin b \sin(B - \omega)}{\cos\varepsilon} = \frac{\sin c \sin(C - \omega)}{\sin\varepsilon},\\ \cos\vartheta &= \sin a \sin(A - \omega),\\ \cos i &= -\frac{\sin a \cos(A - \omega)}{\sin\vartheta},\end{aligned}$$

et tous les éléments sont ainsi déterminés sans ambiguïté et dans de bonnes conditions de calcul.

Il est important de savoir déterminer les variations infiniment petites que subissent les constantes de Gauss lorsque les éléments ϑ, i, ω viennent eux-mêmes à varier. D'après les principes de la Cinématique, on sait que si le trièdre $O\xi\eta\zeta$ est soumis à une rotation infiniment petite dont les projections sur les axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ eux-mêmes sont respectivement dP, dQ, dR, on a

$$d(\cos\widehat{O\xi, Os}) = \cos\widehat{O\eta, Os}\, dR - \cos\widehat{O\zeta, Os}\, dQ,$$

en désignant toujours par Os une direction fixe.

Par suite, quelle que soit la direction Os définie comme précé-

demment par les constantes f et F, on a

$$d[\sin f \sin(v + F)] = \sin f \cos(v + F)\, dR - \cos f\, dQ.$$

Lorsque les éléments $\mathfrak{I}$, i, ω varient, le mouvement de $O\xi\eta\zeta$ résulte des trois rotations élémentaires $d\mathfrak{I}$, di, $d\omega$ autour des axes Oz, ON, $O\zeta$ respectivement, de sorte que l'on a, en appelant toujours g l'argument de la latitude,

$$\begin{aligned} dP &= \sin i \sin g\, d\mathfrak{I} + \cos g\, di, \\ dQ &= \sin i \cos g\, d\mathfrak{I} - \sin g\, di, \\ dR &= d\omega + \cos i\, d\mathfrak{I}; \end{aligned}$$

donc

$$(17)\qquad \begin{aligned} d[\sin f \sin(v + F)] = {} & \sin f \cos(v + F)(d\omega + \cos i\, d\mathfrak{I}) \\ & - \cos f(\sin i \cos g\, d\mathfrak{I} - \sin g\, di); \end{aligned}$$

le premier membre de cette formule générale est d'ailleurs

$$\sin(v + F)\, d(\sin f) + \sin f \cos(v + F)\, dF,$$

et se réduit à $d(\sin f)$ ou à $\sin f\, dF$ suivant que l'on fait $v = \frac{\pi}{2} - F$ ou $v = -F$.

En prenant pour Os les directions Ox_1, Oy_1, Oz_1, on aura donc les formules telles que les suivantes pour résoudre la question proposée :

$$\begin{aligned} da &= \cos(A - \omega)\, di - \sin i \sin(A - \omega)\, d\mathfrak{I}, \\ dA &= d\omega + \cos i\, d\mathfrak{I} - \cot a[\sin(A - \omega)\, di + \sin i \cos(A - \omega)\, d\mathfrak{I}]. \end{aligned}$$

Il est facile de mettre en évidence au lieu de da la différentielle du logarithme de $\sin a$, soit $\mathrm{mod} \cot a\, da$, qui est la quantité dont on a besoin dans la pratique; et, d'après ce qui a été dit plus haut, on peut remplacer $\cot a$ par $\frac{\sin b \sin c}{\sin a} \sin(B - C)$.

Les dérivées partielles telles que $\frac{\partial A}{\partial \mathfrak{I}}$ peuvent être mises sous des formes diverses; en particulier, on vérifie sans peine que

$$\frac{\partial A}{\partial \mathfrak{I}} = \cos i - \cot a \sin i \cos(A - \omega) = \frac{\cos i}{\sin^2 a};$$

mais, contrairement à ce qui précède, le résultat ainsi obtenu ne saurait s'étendre à B et C par simple permutation des lettres.

Il est encore nécessaire de chercher comment varient les constantes de Gauss en vertu de la précession, l'orbite restant fixe : et il faut aussi déterminer les variations des éléments ☊, i, ω eux-mêmes dues à la précession, c'est-à-dire au déplacement des axes de référence.

Déterminons d'abord les variations annuelles des constantes de Gauss, sous l'action de la précession. Si l'on appelle comme d'habitude m et n les précessions annuelles en ascension droite et en déclinaison, le mouvement instantané du trièdre $Ox_1y_1z_1$ formé par les axes équatoriaux est une rotation élémentaire dont les projections sur ces mêmes axes sont respectivement o, $n\,dt$, $-m\,dt$. La formule de Cinématique rappelée ci-dessus devient ici, en désignant toujours par Os une direction fixe, et par dP_1, dQ_1, dR_1 les projections sur Ox_1, Oy_1, Oz_1 de la rotation élémentaire du trièdre $Ox_1y_1z_1$:

$$d(\cos\widehat{Ox_1, Os}) = \cos\widehat{Oy_1, Os}\,dR_1 - \cos\widehat{Oz_1, Os}\,dQ_1,$$

et l'on a de même

$$d(\cos\widehat{Oy_1, Os}) = \cos\widehat{Oz_1, Os}\,dP_1 - \cos\widehat{Ox_1, Os}\,dR_1,$$

$$d(\cos\widehat{Oz_1, Os}) = \cos\widehat{Ox_1, Os}\,dQ_1 - \cos\widehat{Oy_1, Os}\,dP_1.$$

Si donc on prend pour Os la direction $O\xi$, il vient ici

$$\frac{d}{dt}[\sin a \sin(v + A)] = -m \sin b \sin(v + B) - n \sin c \sin(v + C),$$

$$\frac{d}{dt}[\sin b \sin(v + B)] = \quad m \sin a \sin(v + A),$$

$$\frac{d}{dt}[\sin c \sin(v + C)] = \quad n \sin a \sin(v + A);$$

faisant après différentiation $v = \frac{\pi}{2} - A$, ou $v = -A$ dans la première formule, et agissant de même avec les autres, on a finalement

$$\frac{d(\sin a)}{dt} = -m \sin b \cos(A - B) - n \sin c \cos(A - C),$$

$$\frac{d(\sin b)}{dt} = m \sin a \cos(A - B), \qquad \frac{d(\sin c)}{dt} = n \sin a \cos(A - C);$$

$$\sin a \frac{dA}{dt} = m \sin b \sin(A - B) + n \sin c \sin(A - C),$$

$$\sin b \frac{dB}{dt} = m \sin a \sin(A - B), \qquad \sin c \frac{dC}{dt} = n \sin a \sin(A - C).$$

Pour mettre ces formules en nombres, on se reportera aux valeurs de m et n d'après Newcomb :

$$m = 46'',085 + 0'',000279\,t,$$
$$n = 20'',047 - 0'',000085\,t,$$

t étant exprimé en années tropiques à partir de 1900,0.

Le raisonnement précédent permet d'exprimer les dérivées partielles des constantes de Gauss par rapport à $\mathfrak{S}$ sous une nouvelle forme. Si en effet on fait varier $\mathfrak{S}$ de $d\mathfrak{S}$, cela revient évidemment à considérer l'orbite comme fixe, et à donner au trièdre $Ox_1y_1z_1$ une rotation élémentaire $-d\mathfrak{S}$ autour de Oz : cette rotation a pour projections sur Ox_1, Oy_1, Oz_1 respectivement : 0, $\sin\varepsilon\, d\mathfrak{S}$, $-\cos\varepsilon\, d\mathfrak{S}$, et par suite on obtient $\frac{\partial(\sin a)}{\partial\mathfrak{S}}$, $\frac{\partial A}{\partial\mathfrak{S}}$, ..., en remplaçant dans les formules précédentes m par $\cos\varepsilon$, n par $\sin\varepsilon$.

Cherchons maintenant les variations annuelles dues à la précession pour les éléments $\mathfrak{S}$, i, ω eux-mêmes. Le trièdre $Oxyz$ des axes écliptiques est ici soumis à une rotation élémentaire qui est composée de deux autres, savoir : 1° une rotation $-P\,dt$ autour de Oz, en appelant P la précession générale annuelle en longitude; 2° une rotation $Q\,dt$ autour d'une certaine droite OE du plan xy, dont la longitude est φ; Q est la précession annuelle en latitude, si l'on veut, et OE est la position limite de l'intersection du plan de l'écliptique avec sa position infiniment voisine. Dans les mêmes conditions que ci-dessus, on a

$$P = 50'',2564 + 0'',000222\,t,$$
$$Q = 0'',47107 - 0'',00000675\,t,$$
$$\varphi = 173°57'3'' + 32'',869\,t.$$

Mais on peut aussi bien considérer le trièdre $Oxyz$ comme fixe, et regarder le trièdre $O\xi\eta\zeta$ comme mobile et soumis à la résultante des deux rotations opposées aux précédentes, $P\,dt$ et $-Q\,dt$ autour de Oz et de OE, de sorte que cette rotation est équivalente au système des trois rotations $d\mathfrak{S}$, di, $d\omega$ autour de Oz, ON, $O\zeta$. Projetant ces deux systèmes équivalents de rotations sur $O\xi_0$ (c'est-à-dire ON), $O\eta_0$, Oz, on a les égalités

$$di + \cos(\varphi - \mathfrak{S})\,Q\,dt = 0,$$
$$\sin i\,(d\mathfrak{S} - P\,dt) + \cos i \sin(\varphi - \mathfrak{S})\,Q\,dt = 0,$$
$$\cos i\, d\omega + d\mathfrak{S} - P\,dt = 0,$$

de sorte que finalement

$$\frac{d\Omega}{dt} = \mathrm{P} + \mathrm{Q} \cot i \sin(\Omega - \varphi),$$

$$\frac{di}{dt} = - \mathrm{Q} \cos(\Omega - \varphi),$$

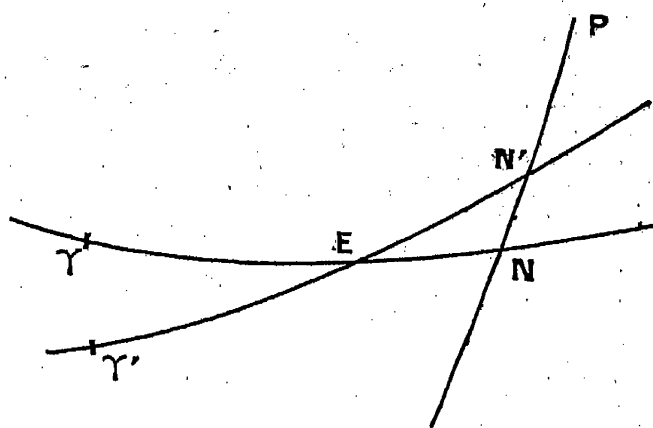
$$\frac{d\omega}{dt} = - \mathrm{Q} \operatorname{coséc} i \sin(\Omega - \varphi);$$

et l'on en déduit, si l'on préfère,

$$\frac{d\varpi}{dt} = \mathrm{P} - \mathrm{Q} \operatorname{tang} \frac{i}{2} \sin(\Omega - \varphi).$$

Ces mêmes formules donnent les variations des éléments équatoriaux; il suffit d'affecter les lettres Ω, i, ω, ϖ de l'indice 1, de remplacer P par m, Q par n, et de faire $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Si l'emploi des variations annuelles n'est pas assez exact pour passer des éléments Ω, i, ω d'une orbite rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe moyens d'une époque t, aux éléments Ω', i', ω' rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe moyens d'une autre époque t', il faudra avoir recours à la considération du triangle sphérique déterminé par l'orbite et les deux écliptiques. Sur la figure 3, γ et γ' sont les deux

Fig. 3.

équinoxes, E est le nœud ascendant ou descendant de l'écliptique de l'époque t' sur l'écliptique de l'époque t, suivant que l'intervalle de temps $t' - t$ est positif ou négatif, P est le plan de l'orbite, N et N' sont les nœuds ascendants de P sur les deux écliptiques.

Si l'on fait, suivant les notations de la *Connaissance des Temps*,

où l'on trouvera en même temps les valeurs numériques nécessaires,

$$\gamma E = \varphi, \qquad \gamma' E = \varphi + \lambda, \qquad \widehat{E} = k,$$

on a d'abord

$$\cos i' = \cos k \cos i + \sin k \sin i \cos(\vartheta - \varphi),$$

ce qui peut s'écrire sous la forme

$$\cos i' = (1 - \alpha) \cos(i - \beta),$$

en faisant

$$\tang \beta = \tang k \cos(\vartheta - \varphi),$$
$$1 - \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 k \sin^2(\vartheta - \varphi)}.$$

On peut toujours, en raison de la petitesse de k, développer en série et écrire

$$\beta = k \cos(\varphi - \vartheta) + \ldots,$$

$$\alpha = \frac{1}{2} k^2 \sin^2(\vartheta - \varphi) + \ldots,$$

en ne négligeant que des termes très petits dont on pourrait aisément tenir compte.

On a alors

$$\cos i' = \cos(i - \beta) - \alpha \cos(i - \beta),$$

et par suite il vient

$$i' = i - \beta + \alpha \cot(i - \beta) - \frac{1}{2} \alpha^2 \cot^3(i - \beta) + \ldots;$$

généralement on pourra faire simplement $i' = i - \beta$, et l'emploi du terme suivant, s'il devient nécessaire, sera suffisant, sauf très rare exception.

On a ensuite dans le triangle ENN'

$$\sin(\omega' - \omega) = -\sin k \sin(\vartheta - \varphi) \operatorname{coséc} i',$$

et presque toujours il suffira d'écrire

$$\omega' = \omega - k \sin(\vartheta - \varphi) \operatorname{coséc} i'.$$

Enfin, on a encore

$$\sin i' \sin(\vartheta' - \varphi - \lambda) = \sin i \sin(\vartheta - \varphi),$$
$$\sin i' \cos(\vartheta' - \varphi - \lambda) = -\sin k \cos i + \cos k \sin i \cos(\vartheta - \varphi),$$

d'où l'on tire

$$\sin i' \sin(\vartheta' - \vartheta - \lambda) = \sin k \sin(\vartheta - \varphi) \left[\cos i + \operatorname{tang}\frac{k}{2} \sin i \cos(\vartheta - \varphi)\right],$$

ou, en ne négligeant que des termes très petits du troisième ordre en k,

$$\sin i' \sin(\vartheta' - \vartheta - \lambda) = \sin k \sin(\vartheta - \varphi) \cos\left[i - \operatorname{tang}\frac{k}{2} \cos(\vartheta - \varphi)\right],$$

c'est-à-dire encore, dans les mêmes conditions d'exactitude,

$$\sin(\vartheta' - \vartheta - \lambda) = -\sin(\omega' - \omega) \cos\left(i - \frac{\beta}{2}\right);$$

et le plus souvent, il suffira d'écrire

$$\vartheta' = \vartheta + \lambda - (\omega' - \omega) \cos\left(i - \frac{\beta}{2}\right).$$

Il serait bien facile de développer une méthode toute pareille pour passer des éléments équatoriaux de l'époque t à ceux de l'époque t'; mais le calcul est moins avantageux et, au surplus, la question ne présente que peu d'intérêt pratique.

26. Pour terminer ce Chapitre, il ne nous reste plus qu'à déterminer les variations que subissent les coordonnées géocentriques ρ, α, δ du point M lorsque les six éléments de l'orbite viennent à varier.

Le point M prend alors un déplacement infiniment petit MM′, et pour avoir directement les variations correspondantes $d\rho$, $d\alpha$, $d\delta$, il suffit de projeter ce déplacement sur trois axes rectangulaires convenablement choisis $O'\xi''\eta''\zeta''$, ayant pour origine la Terre O′. Prenons en effet pour $O'\xi''$ la direction O′M elle-même, d'ascension droite α et de déclinaison δ; choisissons ensuite l'axe $O'\eta''$ perpendiculaire à O′M et dans le plan de l'équateur, de telle façon que son ascension droite soit $\alpha + \frac{\pi}{2}$; l'axe $O'\zeta''$ résulte des deux premiers, et l'on peut considérer son ascension droite comme égale à α, en prenant $\frac{\pi}{2} + \delta$ pour sa déclinaison. Il est clair que les projections de MM′ sur $O'\xi''$, $O'\eta''$, $O'\zeta''$ sont respectivement $d\rho$, $\rho \cos\delta\, d\alpha$, $\rho\, d\delta$; et l'on obtient le même résultat en projetant MM′ sur les axes $O\xi'$, $O\eta'$, $O\zeta'$ parallèles aux précédents menés par le Soleil O.

Si donc a', A', b', B', c', C' sont les valeurs des constantes f, F

définies d'une façon générale au nº 24, qui correspondent aux trois directions $O\xi'$, $O\eta'$, $O\zeta'$, les projections de OM sur ces axes sont

$$r\sin a'\sin(v+A'),$$
$$r\sin b'\sin(v+B'),$$
$$r\sin c'\sin(v+C');$$

et l'on a

$$d\rho = d[r\sin a'\sin(v+A')],$$
$$\rho\cos\delta\, d\alpha = d[r\sin b'\sin(v+B')],$$
$$\rho\, d\delta = d[r\sin c'\sin(v+C')].$$

Les quantités a', A', ..., analogues aux constantes de Gauss, sont faciles à calculer, comme nous le verrons tout à l'heure; elles dépendent des éléments d'orientation ϑ, i, ω, tandis que r et v dépendent des éléments intrinsèques M_0, n, φ de l'orbite, et par suite on peut écrire, par exemple,

$$d\rho = \sin a'\, d[r\sin(v+A')] + r\, d[\sin a'\sin(v+A')],$$

en prenant pour $d[r\sin(v+A')]$ le second membre de la formule (13), où l'on remplace χ par A', et pour $d[\sin a'\sin(v+A')]$ le second membre de la formule (17), où l'on remplace f par a' et F par A'; si l'on fait ces substitutions et que l'on développe $\sin g$ et $\cos g$, qui figurent dans (17), on a finalement

$$(18)\quad \begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} = {} & \frac{a}{\rho}\operatorname{séc}\varphi[\sin a'\cos(v+A') + \sin\varphi\sin a'\cos A'][dM_0 + (t-t_0)\,dn] \\ & - \frac{2}{3}\frac{a}{\rho}\frac{r\sqrt{a}}{k}\sin a'\sin(v+A')\,dn \\ & + \frac{a}{\rho}[\sin u\sin a'\cos(v+A') - \cos\varphi\sin a'\sin A']\,d\varphi \\ & + \frac{r}{\rho}\sin a'\cos(v+A')(d\omega + \cos i\, d\vartheta) \\ & + \frac{r\sin v}{\rho}\cos a'(\cos\omega\, di + \sin i\sin\omega\, d\vartheta) \\ & + \frac{r\cos v}{\rho}\cos a'(\sin\omega\, di - \sin i\cos\omega\, d\vartheta). \end{aligned}$$

En changeant a' et A' en b' et B', puis en c' et C', on obtient de la même façon les valeurs de $\cos\delta\, d\alpha$ et $d\delta$, qui, généralement, sont seules utiles.

S'il y a lieu d'employer au lieu de la formule (13) l'une des formules (14), (15) ou (16), on obtiendra par le remplacement de $d[r\sin(v+A')]$ des résultats analogues qu'il est inutile de transcrire ici en détail.

On doit encore observer que, dans la formule (18), les parenthèses des trois dernières lignes, qui ne dépendent que des éléments d'orientation et de leurs variations, sont aussi indépendantes des axes de référence, de sorte qu'on peut y remplacer les éléments écliptiques ϑ, i, ω par les éléments équatoriaux ϑ_1, i_1, ω_1 : en effet, ces parenthèses ne sont autre chose (au signe près pour la troisième) que les projections sur les axes $O\zeta_1$, $O\xi_1$, $O\eta_1$ de la rotation élémentaire qui définit le mouvement instantané du trièdre $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ dû à la variation des éléments d'orientation de l'orbite, en désignant par $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ la position particulière du trièdre général $O\xi\eta\zeta$ que l'on obtient quand on place le point M au périhélie A.

Pour calculer les quantités a', A', ..., dressons les tableaux suivants qui montrent d'une façon claire les cosinus des angles que font entre elles les arêtes des trois trièdres $Ox_1y_1z_1$, $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, $O\xi'\eta'\zeta'$:

	$O\xi'$	$O\eta'$	$O\zeta'$
Ox_1	$\cos\delta\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\delta\cos\alpha$
Oy_1	$\cos\delta\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\delta\sin\alpha$
Oz_1	$\sin\delta$	0	$\cos\delta$

	$O\xi_1$	$O\eta_1$	$O\zeta_1$
Ox_1	$\sin a\sin A$	$\sin a\cos A$	$\cos a$
Oy_1	$\sin b\sin B$	$\sin b\cos B$	$\cos b$
Oz_1	$\sin c\sin C$	$\sin c\cos C$	$\cos c$

	$O\xi_1$	$O\eta_1$	$O\zeta_1$
$O\xi'$	$\sin a'\sin A'$	$\sin a'\cos A'$	$\cos a'$
$O\eta'$	$\sin b'\sin B'$	$\sin b'\cos B'$	$\cos b'$
$O\zeta'$	$\sin c'\sin C'$	$\sin c'\cos C'$	$\cos c'$

On a, par exemple,

$$\cos\widehat{\xi'\xi_1} = \cos\widehat{x_1\xi'}\cos\widehat{x_1\xi_1} + \cos\widehat{y_1\xi'}\cos\widehat{y_1\xi_1} + \cos\widehat{z_1\xi'}\cos\widehat{z_1\xi_1}.$$

et par suite

$$\begin{aligned}
\sin a' \sin A' &= \cos\delta \cos\alpha \sin a \sin A + \cos\delta \sin\alpha \sin b \sin B + \sin\delta \sin c \sin C,\\
\sin a' \cos A' &= \cos\delta \cos\alpha \sin a \cos A + \cos\delta \sin\alpha \sin b \cos B + \sin\delta \sin c \cos C,\\
\cos a' &= \cos\delta \cos\alpha \cos a + \cos\delta \sin\alpha \cos b + \sin\delta \cos c;
\end{aligned}$$

et l'on obtient de même $\sin b' \sin B'$, ..., $\sin c' \sin C'$, ..., en remplaçant les facteurs $\cos\delta \cos\alpha$, $\cos\delta \sin\alpha$, $\sin\delta$ dans les seconds membres par $-\sin\alpha$, $\cos\alpha$, 0 d'abord, puis par $-\sin\delta \cos\alpha$, $-\sin\delta \sin\alpha$, $\cos\delta$.

En employant les éléments équatoriaux, on a des formules plus simples semblables à celles qui donnent les constantes de Gauss. Si $O\xi_2\eta_2\zeta_2$ est la position particulière du trièdre général $O\xi\eta\zeta$ obtenue en mettant le point M au nœud ascendant de l'orbite par rapport à l'équateur, les ascensions droites et déclinaisons des axes $O\xi'$, $O\eta'$, $O\zeta'$, $O\xi_2$, $O\eta_2$, $O\zeta_2$ sont données par le tableau suivant :

	$O\xi'$	$O\eta'$	$O\zeta'$	$O\xi_2$	$O\eta_2$	$O\zeta_2$
Ascension droite....	α	$\alpha + \frac{\pi}{2}$	α	ϑ_1	$\vartheta_1 + \frac{\pi}{2}$	$\vartheta_1 - \frac{\pi}{2}$
Déclinaison.........	δ	0	$\delta + \frac{\pi}{2}$	0	i_1	$\frac{\pi}{2} - i_1$

et par suite on a immédiatement

$$\begin{aligned}
\sin a' \sin(A' - \omega_1) &= \cos\delta \cos(\alpha - \vartheta_1),\\
\sin a' \cos(A' - \omega_1) &= \sin i_1 \sin\delta + \cos i_1 \cos\delta \sin(\alpha - \vartheta_1),\\
\cos a' &= \cos i_1 \sin\delta - \sin i_1 \cos\delta \sin(\alpha - \vartheta_1);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin b' \sin(B' - \omega_1) &= -\sin(\alpha - \vartheta_1),\\
\sin b' \cos(B' - \omega_1) &= \cos i_1 \cos(\alpha - \vartheta_1),\\
\cos b' &= -\sin i_1 \cos(\alpha - \vartheta_1);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin c' \sin(C' - \omega_1) &= \sin\delta \cos(\alpha - \vartheta_1),\\
\sin c' \cos(C' - \omega_1) &= \sin i_1 \cos\delta - \cos i_1 \sin\delta \sin(\alpha - \vartheta_1),\\
\cos c' &= \cos i_1 \cos\delta + \sin i_1 \sin\delta \sin(\alpha - \vartheta_1).
\end{aligned}$$

Que l'on opère d'une façon ou d'une autre, tous les calculs relatifs à la détermination de $d\alpha$ et $d\delta$ se feront rapidement, car ils n'exigent qu'une faible approximation, celle que donne l'emploi des Tables à quatre décimales ou cinq au plus : on rencontrera d'ailleurs de nombreuses vérifications sur lesquelles il serait superflu d'insister.

Il est clair encore qu'au point de vue purement numérique, quand on ne cherche pas à mettre en évidence dans les formules telles que (18) les coefficients mêmes des variations des éléments, on peut faire avantageusement des groupements de termes, dont il suffit d'indiquer ici la possibilité, sans entrer dans de plus amples détails sur leur choix. Observons seulement que si, dans la formule (18), on change a' et A' successivement en a, A, b, B, c, C, on aura précisément, toujours au facteur $\frac{1}{\rho}$ près, les projections du déplacement MM′ sur les axes équatoriaux eux-mêmes, soit $\frac{dx_1}{\rho}$, $\frac{dy_1}{\rho}$, $\frac{dz_1}{\rho}$, et qu'on en peut déduire immédiatement

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{\rho} &= \cos\delta\cos\alpha\frac{dx_1}{\rho} + \cos\delta\sin\alpha\frac{dy_1}{\rho} + \sin\delta\frac{dz_1}{\rho},\\
\cos\delta\, d\alpha &= -\sin\alpha\frac{dx_1}{\rho} + \cos\alpha\frac{dy_1}{\rho},\\
d\delta &= -\sin\delta\cos\alpha\frac{dx_1}{\rho} - \sin\delta\sin\alpha\frac{dy_1}{\rho} + \cos\delta\frac{dz_1}{\rho};
\end{aligned}$$

le calcul de $\cos\delta\, d\alpha$ et de $d\delta$ est ainsi un peu abrégé.

CHAPITRE VI.

PROBLÈMES DIVERS RELATIFS A LA DÉTERMINATION DES ORBITES KÉPLÉRIENNES.

---

27. Au problème traité dans le Chapitre précédent, correspondent divers problèmes inverses, dont le principal est la détermination d'une orbite à l'aide d'observations réellement faites à la surface de la Terre. Mais avant d'aborder l'étude de ce problème fondamental, nous devons résoudre un certain nombre de questions préliminaires.

Il est clair qu'une orbite képlérienne est complètement déterminée par la connaissance, à un instant donné t, de la position héliocentrique du point M, et par celle de la vitesse correspondante, considérée bien entendu comme un vecteur.

Toutes les notations du Chapitre précédent étant généralement conservées, nous allons tout d'abord déterminer les éléments de l'orbite du point M, connaissant, à l'instant t, ses coordonnées héliocentriques x, y, z, et les projections sur les axes de sa vitesse V, soit x', y', z'. Le plan fondamental Oxy sera indifféremment celui de l'écliptique ou celui de l'équateur moyen d'une certaine date indiquée, l'axe Ox étant toujours dirigé vers l'équinoxe moyen correspondant. De plus, nous supposerons la vitesse V et ses projections calculées en prenant une unité de temps telle que le coefficient k devienne égal à l'unité; en d'autres termes, si l'on maintient pour ce coefficient sa valeur ordinaire, et que l'on fasse $\tau = kt$, les valeurs de x', y', z' sont celles des dérivées des coordonnées x, y, z, prises par rapport à τ, pour l'instant donné.

En se reportant au Chapitre III, on voit que la constante F de l'équation des forces vives est précisément $-\frac{1}{2a}$, et que la constante h des aires est ici $\sqrt{p}$. La normale au plan de l'orbite, qui porte le vecteur h, a d'ailleurs pour cosinus directeurs évidents $\sin i \sin \Omega$,

$-\sin i \cos \mathfrak{S}$, $\cos i$, en appelant $\mathfrak{S}$ et i la longitude du nœud ascendant et l'inclinaison du plan de l'orbite sur le plan Oxy, quel que soit ce plan. En faisant

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad V^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \qquad (r > 0,\ V > 0),$$

l'équation des forces vives donne donc d'abord

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - V^2,$$

et l'on connaît ainsi l'élément a, d'où l'on déduit, si l'orbite est une ellipse, le moyen mouvement diurne $n = ka^{-\frac{3}{2}}$.

En projetant le vecteur des aires sur les axes, on a ensuite

$$\begin{aligned}
\sqrt{p}\sin i \sin \mathfrak{S} &= yz' - y'z,\\
\sqrt{p}\sin i \cos \mathfrak{S} &= xz' - x'z,\\
\sqrt{p}\cos i &= xy' - x'y,
\end{aligned}$$

et ces équations font connaître les éléments p, $\mathfrak{S}$, i : si l'inclinaison i est petite ou voisine de π, l'angle $\mathfrak{S}$ est nécessairement mal déterminé.

En faisant

$$rr' = xx' + yy' + zz',$$

de sorte que r' est la vitesse radiale, ou la dérivée $\frac{dr}{d\tau}$ pour l'instant t, on peut écrire encore, en appliquant une identité bien connue,

$$\begin{aligned}
p &= (yz' - y'z)^2 + (xz' - x'z)^2 + (xy' - x'y)^2\\
&= r^2(V^2 - r'^2),
\end{aligned}$$

et déterminer ainsi directement le paramètre p.

La relation $p = a(1 - e^2)$ permet alors de calculer l'excentricité e, mais d'une façon peu précise, si elle est petite.

On la retrouve, et en même temps l'anomalie vraie v, en faisant usage des deux formules

$$e \sin v = r'\sqrt{p},$$

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1,$$

dont la seconde résulte de l'équation de l'orbite, tandis que pour

obtenir la première, il suffit de différentier la seconde, et de remplacer $r^2 \frac{dv}{dt}$ par sa valeur $\sqrt{p}$.

Si l'excentricité e est petite, l'angle v est nécessairement mal déterminé.

Connaissant v, on en déduit l'anomalie moyenne M pour l'époque t, et par suite pour une époque quelconque; en particulier l'anomalie moyenne M_0 de l'époque t_0 : c'est encore un élément de l'orbite.

Si l'orbite est parabolique, ce qui exige la condition

$$\frac{2}{r} = V^2,$$

on a $e = 1$, et par suite, en écrivant

$$\sin v = r' \sqrt{p}, \qquad 1 + \cos v = \frac{p}{r},$$

on en tire plutôt

$$\operatorname{tang} \frac{v}{2} = \frac{rr'}{\sqrt{p}}.$$

Connaissant v, on en déduit la quantité P qui remplace ici l'anomalie moyenne, et par suite l'époque T du passage au périhélie.

Quand l'orbite est elliptique ou hyperbolique, voisine de la forme parabolique, on détermine de même P au lieu de M, et ensuite T. Dans tous ces cas, la distance périhélie q est égale à $\frac{p}{1+e}$.

Il reste à déterminer la distance ω du périhélie au nœud, ce qui se fera par les équations

$$r \sin(v + \omega) = z \operatorname{coséc} i,$$
$$r \cos(v + \omega) = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta,$$

qui résultent immédiatement des formules qui expriment x, y, z en fonction de r, de ϑ, et l'argument de la latitude $v + \omega$.

L'incertitude qui peut exister sur l'angle ω dépend de l'incertitude de ϑ et de celle de v; mais l'incertitude sur l'argument de la latitude $v + \omega$ ne dépend que de celle de ϑ. Quand l'inclinaison est trop petite ou trop voisine de π pour que l'angle ϑ soit bien déterminé, il vaut donc mieux avoir recours à d'autres formules que l'on obtient de la façon suivante. Les équations qui donnent $\sqrt{p}$, i, ϑ conduisent

immédiatement à la relation

$$z \cot i = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta;$$

d'autre part, on a

$$\operatorname{coséc} i = \cot i + \operatorname{tang} \frac{i}{2} = -\cot i + \cot \frac{i}{2};$$

on peut donc écrire

$$\begin{aligned} r \sin(v + \omega) &= -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta + z \operatorname{tang} \frac{i}{2} \\ &= \quad x \sin \vartheta - y \cos \vartheta + z \cot \frac{i}{2}; \end{aligned}$$

combinant cette relation avec celle qui donne $r \cos(v + \omega)$, il vient

$$r \sin(v + \omega + \vartheta) = y + z \operatorname{tang} \frac{i}{2} \cos \vartheta,$$

$$r \cos(v + \omega + \vartheta) = x - z \operatorname{tang} \frac{i}{2} \sin \vartheta,$$

ou bien

$$r \sin(v + \omega - \vartheta) = -y + z \cot \frac{i}{2} \cos \vartheta,$$

$$r \cos(v + \omega - \vartheta) = \quad x + z \cot \frac{i}{2} \sin \vartheta.$$

Le premier groupe convient au cas où l'inclinaison est petite, et l'on voit que même alors la longitude dans l'orbite $v + \omega + \vartheta$ reste très bien déterminée; le second groupe convient au cas où l'inclinaison est voisine de π, et c'est alors la quantité $v + \omega - \vartheta$ qui reste bien déterminée. Dans tous les cas, en effet, la longitude héliocentrique doit être regardée comme bien déterminée, et elle devient précisément égale à $\vartheta \pm (v + \omega)$, quand on a $i = 0$ ou $i = \pi$.

Suivant que le plan fondamental Oxy est celui de l'écliptique ou celui de l'équateur, on a ainsi obtenu les éléments d'orientation ϑ, i, ω relatifs à l'écliptique ou à l'équateur : dans le dernier cas, on peut ensuite facilement passer aux éléments relatifs à l'écliptique, en se servant de l'obliquité ε. Dans tous les cas, on peut diriger le calcul de façon à obtenir directement les constantes de Gauss A, B, C, $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, relatives au système d'axes choisi, et en déduire ensuite les éléments écliptiques comme nous l'avons vu précédemment. On a en effet

$$\frac{x}{r} = \sin a \sin(v + A),$$

d'où par différentiation

$$\frac{rx' - r'x}{r^2} = v' \sin a \cos(v + A);$$

remplaçant $r^2 v'$ par $\sqrt{p}$, on a donc pour déterminer A et $\sin a$ les deux formules

$$\sin a \sin(v + A) = \frac{x}{r},$$

$$\sin a \cos(v + A) = \frac{rx' - r'x}{\sqrt{p}};$$

de même

$$\sin b \sin(v + B) = \frac{y}{r}, \qquad \sin c \sin(v + C) = \frac{z}{r},$$

$$\sin b \cos(v + B) = \frac{ry' - r'y}{\sqrt{p}}, \qquad \sin c \cos(v + C) = \frac{rz' - r'z}{\sqrt{p}}.$$

Ayant donc d'abord déterminé p et v comme ci-dessus, mais sans passer par l'intermédiaire de ϑ et i, on a bien facilement les constantes de Gauss qui servent au calcul des coordonnées rectangulaires héliocentriques pour une date quelconque.

Si le plan fondamental Oxy est celui de l'équateur, on a ensuite les éléments d'orientation pour l'écliptique par les formules du Chapitre précédent, qui peuvent être écrites ici plus commodément sous la forme équivalente

$$\sin i \sin(v + \omega) = \cos\varepsilon \sin c \sin(v + C) - \sin\varepsilon \sin b \sin(v + B),$$

$$\sin i \cos(v + \omega) = \cos\varepsilon \sin c \cos(v + C) - \sin\varepsilon \sin b \cos(v + B),$$

$$\sin \vartheta = \frac{\sin b \sin(B - \omega)}{\cos\varepsilon} = \frac{\sin c \cos(C - \omega)}{\sin\varepsilon},$$

$$\cos \vartheta = \sin a \sin(A - \omega), \qquad \cos i = -\frac{\sin a \cos(A - \omega)}{\sin \vartheta}.$$

Si le plan Oxy est celui de l'écliptique, on peut employer les mêmes formules en faisant simplement $\varepsilon = 0$, de sorte que $\omega = C$, $\sin c = \sin i$.

28. Envisageons maintenant un problème plus général, dont le précédent n'est qu'un cas limite, celui de la détermination d'une orbite képlérienne par la connaissance des positions héliocentriques du point M à deux instants donnés t_1 et t_2 : il est clair encore que ce problème est entièrement déterminé.

Les coordonnées des deux positions données M_1 et M_2 seront désignées, dans les mêmes conditions que ci-dessus, par x_1, y_1, z_1, et x_2, y_2, z_2, respectivement; r_1, r_2, v_1, v_2 seront les rayons vecteurs et les anomalies vraies, ces dernières étant d'abord inconnues, et nous ferons de plus $\tau = k(t_2 - t_1)$.

Si l'on appelle s le double de l'aire du triangle OM_1M_2, soit la quantité $r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1)$, on a d'abord, en projetant cette aire sur les plans de coordonnées,

$$\begin{aligned} s \sin i \sin \vartheta &= y_1 z_2 - y_2 z_1, \\ s \sin i \cos \vartheta &= x_1 z_2 - x_2 z_1, \\ s \cos i &= x_1 y_2 - x_2 y_1, \end{aligned}$$

et ces équations font connaître, en même temps que les éléments ϑ et i, la quantité s, et par la suite la différence $v_2 - v_1$.

Supposons pour un instant le paramètre p connu. L'équation de l'orbite donne les deux relations

$$e \cos v_2 = \frac{p}{r_2} - 1, \qquad e \cos v_1 = \frac{p}{r_1} - 1,$$

d'où, par soustraction et addition,

$$\begin{aligned} e \sin \frac{v_1 + v_2}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{p}{r_1} - \frac{p}{r_2}\right) \operatorname{coséc} \frac{v_2 - v_1}{2}, \\ e \cos \frac{v_1 + v_2}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{p}{r_1} + \frac{p}{r_2} - 2\right) \operatorname{séc} \frac{v_2 - v_1}{2}, \end{aligned}$$

et l'on a ainsi l'excentricité e, en même temps que les deux anomalies vraies v_1 et v_2. Le demi-grand axe, le moyen mouvement, les anomalies moyennes pour les deux époques t_1 et t_2 en résultent : la différence de ces anomalies moyennes doit d'ailleurs être égale à $n(t_2 - t_1)$, et c'est justement là, si l'on veut, la condition qui détermine p.

Enfin la distance ω du périhélie au nœud se calcule comme précédemment à l'aide de l'une ou l'autre des deux positions données.

Tout revient donc à la détermination du paramètre p, ou à celle d'une inconnue équivalente g définie par la relation

$$s = g\sqrt{p};$$

et puisque ces quantités sont indépendantes du choix des axes, les

données de cette question sont en réalité r_1, r_2, $v_2 - v_1$ et τ. Comme, d'après la loi des aires, $\tau\sqrt{p}$ est le double de l'aire du secteur curviligne OM_1M_2 compris entre les deux rayons vecteurs OM_1, OM_2 et l'arc de trajectoire M_1M_2, on voit que $\frac{g}{\tau}$ n'est autre chose que le rapport de l'aire du triangle OM_1M_2 à celle du secteur curviligne correspondant.

Introduisons a, e, et les deux anomalies excentriques u_1 et u_2 comme inconnues auxiliaires, et formons d'abord les relations qui existent entre les cinq inconnues et les données.

D'après la valeur de s, on a en premier lieu

$$(a) \qquad r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1) = g\sqrt{a(1-e^2)};$$

en partant des relations connues

$$\sqrt{\frac{r_1}{a}}\sin\frac{v_1}{2} = \sqrt{1+e}\sin\frac{u_1}{2}, \qquad \sqrt{\frac{r_2}{a}}\sin\frac{v_2}{2} = \sqrt{1+e}\sin\frac{u_2}{2},$$

$$\sqrt{\frac{r_1}{a}}\cos\frac{v_1}{2} = \sqrt{1-e}\cos\frac{u_1}{2}, \qquad \sqrt{\frac{r_2}{a}}\cos\frac{v_2}{2} = \sqrt{1-e}\cos\frac{u_2}{2},$$

qui donnent aussi

$$r_1 = a(1 - e\cos u_1), \qquad r_2 = a(1 - e\cos u_2),$$

on a ensuite

$$(b) \qquad \sqrt{r_1 r_2}\sin\frac{v_2 - v_1}{2} = a\sqrt{1-e^2}\sin\frac{u_2 - u_1}{2},$$

$$(c) \qquad \sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{v_2 - v_1}{2} = a\left(\cos\frac{u_2 - u_1}{2} - e\cos\frac{u_1 + u_2}{2}\right),$$

$$(d) \qquad r_1 + r_2 = 2a\left(1 - e\cos\frac{u_2 - u_1}{2}\cos\frac{u_1 + u_2}{2}\right).$$

Enfin la différence des anomalies moyennes est égale à $\tau a^{-\frac{3}{2}}$, et en les exprimant à l'aide des anomalies excentriques, il vient

$$(e) \qquad \tau = a^{\frac{3}{2}}\left(u_2 - u_1 - 2e\sin\frac{u_2 - u_1}{2}\cos\frac{u_2 + u_1}{2}\right).$$

Pour avoir l'équation qui détermine g, il faudrait éliminer a, e, u_1 et u_2 entre les relations (a), (b), (c), (d), (e) : mais on voit qu'on ne peut arriver à un résultat simple qu'en gardant $u_2 - u_1$ comme inconnue auxiliaire, et que l'on a seulement à éliminer

$\sqrt{1-e^2}$, $e\cos\frac{u_1+u_2}{2}$ et a pour obtenir deux équations propres à déterminer g et u_2-u_1.

Cette élimination est facile. On fait disparaître $\sqrt{1-e^2}$ en divisant membre à membre (a) et (b), d'où

$$(f)\qquad g = 2\sqrt{a}\sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{v_2-v_1}{2}\sin\frac{u_2-u_1}{2}.$$

Éliminant ensuite $e\cos\frac{u_1+u_2}{2}$ entre (c) et (d), puis entre (c) et (e), on a, en tenant compte de (f),

$$(g)\qquad \begin{cases} r_1+r_2-2\sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{v_2-v_1}{2}\cos\frac{u_2-u_1}{2} = 2a\sin^2\frac{u_2-u_1}{2}, \\ \tau - g = a^{\frac{3}{2}}[u_2-u_1-\sin(u_2-u_1)]. \end{cases}$$

Portant dans ces deux relations la valeur de a tirée de (f), et faisant

$$m = \sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{v_2-v_1}{2},$$

on obtient enfin les deux équations cherchées

$$(1)\qquad \begin{cases} g = \tau - \dfrac{g^3}{m^3}\,\dfrac{(u_2-u_1)-\sin(u_2-u_1)}{8\sin^3\frac{u_2-u_1}{2}}, \\ \cos\dfrac{u_2-u_1}{2} = \dfrac{r_1+r_2}{2m} - \dfrac{g^2}{4m^3}. \end{cases}$$

On doit observer sur ces équations que les inconnues g et u_2-u_1 ne dépendent que de τ, de la somme r_1+r_2 des deux rayons vecteurs OM_1, OM_2, et de la quantité m, c'est-à-dire, si l'on veut, de la corde M_1M_2 du secteur OM_1M_2, puisque l'on a, en appelant maintenant s cette corde,

$$s^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2\cos(v_2-v_1) = (r_1+r_2)^2 - 4m^2.$$

Ce sont ces mêmes quantités qui interviennent quand on cherche à déterminer directement le demi-grand axe a, dont les autres inconnues résulteraient aisément.

Faisons à cet effet

$$u_2-u_1 = 2\psi,\qquad e\cos\frac{u_1+u_2}{2} = \cos\varphi,$$

de sorte que les équations (c), (d), (e) s'écrivent

$$m = \sqrt{r_1 r_2} \cos\frac{v_2 - v_1}{2} = a(\cos\psi - \cos\varphi),$$

$$r_1 + r_2 = 2a(1 - \cos\varphi\cos\psi),$$

$$\tau = a^{\frac{3}{2}}(2\psi - 2\sin\psi\cos\varphi)$$
$$= a^{\frac{3}{2}}\{[(\varphi+\psi) - \sin(\varphi+\psi)] - [(\varphi-\psi) - \sin(\varphi-\psi)]\}.$$

On a immédiatement

$$s = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4m^2} = 2a\sin\varphi\sin\psi,$$

et, par suite,

$$1 - \cos(\varphi+\psi) = \frac{r_1 + r_2 + s}{2a}, \qquad 1 - \cos(\varphi - \psi) = \frac{r_1 + r_2 - s}{2a}.$$

Posant donc finalement

$$\sin^2\frac{\varphi'}{2} = \frac{r_1 + r_2 + s}{4a}, \qquad \sin^2\frac{\psi'}{2} = \frac{r_1 + r_2 - s}{4a},$$

il vient

$$\tau = a^{\frac{3}{2}}[(\varphi' - \sin\varphi') - (\psi' - \sin\psi')]:$$

c'est l'équation de Lambert, dont nous n'avons pas à faire usage.

Mais revenons aux équations (1) : lorsque la différence $u_2 - u_1$ des anomalies excentriques est grande, on connaît toujours des valeurs approchées des inconnues, et la résolution des équations (1) par les méthodes usuelles d'approximation en résulte sans peine. Presque toujours, dans les applications qui suivront, la différence $u_2 - u_1$ est petite, et même très petite, de sorte qu'il convient d'abord de modifier la forme de la première des équations (1), de façon à permettre le calcul exact du coefficient de $\frac{g^3}{m^3}$. En se reportant aux notations adoptées au Chapitre précédent (n° 22), et appelant u la différence $u_2 - u_1$, on a

$$\frac{(u_2 - u_1) - \sin(u_2 - u_1)}{8\sin^3\frac{u_2 - u_1}{2}} = \frac{1}{2}\lambda^3,$$

et, par suite, il vient

$$(2) \qquad g = \tau - \frac{1}{2}\left(g\frac{\lambda}{m}\right)^3 = \tau - \frac{1}{2}\left(\frac{g\beta}{m}\operatorname{séc}^{\frac{1}{3}}\frac{u}{2}\right)^3.$$

Cette formule, jointe à la deuxième équation (1), permet, avec

l'usage de la Table V, le calcul de g sans difficulté. On pourra même la plupart du temps prendre $\beta = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, c'est-à-dire en fait supprimer le facteur β, et remplacer le coefficient $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{6}$ dans le second terme de g : cette simplification est légitime notamment dans le cas très général où il suffit d'obtenir ce second terme avec la précision d'un calcul à cinq décimales, toutes les fois que la différence des anomalies excentriques $u_2 - u_1$ est inférieure en valeur absolue à 20°.

Si $\frac{\tau^2}{m^3}$ est une quantité suffisamment petite, on peut regarder $\frac{g}{\tau}$ et $\cos\frac{u_2 - u_1}{2}$ comme développables suivant les puissances de cette quantité; et il est clair alors qu'on arrive à la valeur exacte de g par les approximations successives les plus simples, en commençant par faire $g = \tau$ dans la formule qui donne $\cos\frac{u_2 - u_1}{2}$, et en écrivant l'équation (2) sous la forme

$$g = \frac{\tau}{1 + \frac{g^2\beta^3}{2m^3}\,\text{séc}^{\frac{3}{5}}\frac{u_2 - u_1}{2}}.$$

On a supposé implicitement dans ce qui précède qu'il s'agissait d'une orbite elliptique. Dans le cas d'une orbite hyperbolique, les anomalies excentriques u_1 et u_2 auraient des valeurs purement imaginaires que nous pouvons désigner par $u'_1\sqrt{-1}$ et $u'_2\sqrt{-1}$; les formules (1) deviennent alors

$$\text{ch}\frac{u'_2 - u'_1}{2} = \frac{r_1 + r_2}{2m} - \frac{g^2}{4m^3},$$

$$g = \tau - \frac{1}{2}\left(g\frac{\lambda}{m}\right)^3,$$

la fonction λ correspondant à l'angle u égal à $i(u'_2 - u'_1)$.

On fera donc

$$\text{séc}\frac{u'}{2} = \text{ch}\frac{u'_2 - u'_1}{2},$$

et l'on aura alors, pour remplacer la formule (2),

$$g = \tau - \frac{1}{2}\left(\frac{g\beta'}{m}\cos^{\frac{1}{5}}\frac{u'}{2}\right)^3,$$

la fonction β' étant calculée par la Table V en fonction de l'angle $\frac{u'}{2}$, et pouvant généralement être réduite comme β à $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Dans le cas intermédiaire de la parabole, où les anomalies excentriques sont nulles, il vient simplement

$$1 = \frac{r_1 + r_2}{2m} - \frac{g^2}{4m^3},$$

$$g = \tau - \frac{g^3}{6m^3},$$

ou bien

$$g = \frac{3m\tau}{r_1 + r_2 + m},$$

avec la condition

$$\tau^2 = \frac{2}{g}(r_1 + r_2 + m)^2(r_1 + r_2 - 2m),$$

qui exprime que l'orbite cherchée est effectivement une parabole.

En introduisant comme plus haut la corde $M_1 M_2$ égale à s, on vérifie sans peine que cette condition peut se mettre sous la forme

$$6\tau = (r_1 + r_2 + s)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_2 - s)^{\frac{3}{2}}:$$

c'est l'équation d'Euler, qui résulte de l'équation de Lambert en faisant a infini.

29. Reprenons les données et les notations du n° 27, et soit M_1 la position du point M à une autre époque t_1; appelons aussi x_1, y_1, z_1 les coordonnées héliocentriques de M_1, et faisons $\tau_1 = k(t_1 - t)$.. Ces coordonnées x_1, y_1, z_1 sont des fonctions de τ_1 et de x, y, z, x', y', z', déterminées par les équations du mouvement, qui prennent ici, en raison du choix fait de l'unité de temps, la forme simple (il suffit d'écrire la première)

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau_1^2} + \frac{x_1}{r_1^3} = 0;$$

de plus, pour $\tau_1 = 0$, les fonctions x_1, y_1, z_1 et leurs dérivées premières $\frac{dx_1}{d\tau_1}, \frac{dy_1}{d\tau_1}, \frac{dz_1}{d\tau_1}$ doivent se réduire respectivement à x, y, z, x', y', z', ce qui achève de les définir complètement.

Comme la vitesse V est dans le plan OMM_1 de l'orbite, le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x & x' \\ y_1 & y & y' \\ z_1 & z & z' \end{vmatrix}$$

est nul; par suite on peut écrire

$$x_1 = f_1 x + g_1 x', \qquad y_1 = f_1 y + g_1 y', \qquad z_1 = f_1 z + g_1 z',$$

et tout revient à l'étude des deux coefficients f_1 et g_1, qui sont manifestement indépendants du choix des axes de coordonnées, l'origine étant toujours le Soleil.

Avant de montrer comment on peut effectivement déterminer f_1 et g_1 en fonction de τ_1, x, y, z, x', y', z', nous allons donner diverses expressions de ces quantités qui nous seront utiles par la suite.

Nous pouvons supposer que le plan xOy est celui de l'orbite, l'axe Ox étant dirigé vers le périhélie. Dans ces conditions, on a $z_1 = z = z' = 0$, et des deux relations qui donnent x_1 et y_1, on tire, en remarquant que $xy' - x'y$ n'est autre chose ici que la constante des aires $\sqrt{p}$,

$$f_1 \sqrt{p} = x_1 y' - x' y_1, \qquad g_1 \sqrt{p} = x y_1 - x_1 y;$$

on voit ainsi que $g_1 \sqrt{p}$ est le double de l'aire du triangle OMM_1, tandis que $(1 - f_1)\sqrt{p}$ est le double de l'aire du triangle MVM_1, en appelant V l'extrémité du vecteur vitesse pour le point M; donc, puisque $\tau_1 \sqrt{p}$ est le double de l'aire du secteur curviligne OMM_1, les quantités $\frac{g_1}{\tau_1}$ et $\frac{1 - f_1}{\tau_1}$ sont respectivement les rapports des aires des deux triangles OMM_1 et MVM_1 à celle du secteur correspondant OMM_1. En particulier, le coefficient g_1 ne diffère pas, en tenant compte du changement de notations, de la quantité g du numéro précédent.

Si d'ailleurs M_2 est une nouvelle position du point M correspondant à l'époque t_2, et que l'on emploie toutes les mêmes notations, en remplaçant l'indice 1 par l'indice 2, on a

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 x + g_1 x' & f_2 x + g_2 x' \\ f_1 y + g_1 y' & f_2 y + g_2 y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix},$$

ce qui montre que le déterminant $f_1 g_2 - f_2 g_1$ n'est autre que le

coefficient g lui-même du numéro précédent, puisque le double de l'aire du triangle OM_1M_2 est $x_1y_2 - x_2y_1$, et que l'on a

$$\sqrt{p} = xy' - x'y.$$

D'après la signification de g_1, on a, en introduisant les rayons vecteurs r, r_1 et les anomalies vraies v, v_1,

$$g_1 = \frac{rr_1 \sin(v_1 - v)}{\sqrt{p}}.$$

Pour déterminer ensuite f_1, observons qu'en appelant r' et v' les dérivées de r et de v, prises toujours par rapport à τ, et pour l'époque t, on a, en conservant les axes particuliers indiqués plus haut,

$$x' = r'\cos v - rv'\sin v, \qquad y' = r'\sin v + rv'\cos v,$$

et par suite, en remplaçant r' et rv' par leurs valeurs connues $\frac{e\sin v}{\sqrt{p}}$ et $\frac{\sqrt{p}}{r}$, dont la dernière peut être écrite sous la forme $\frac{1 + e\cos v}{\sqrt{p}}$, il vient

$$x' = -\frac{\sin v}{\sqrt{p}}, \qquad y' = \frac{e + \cos v}{\sqrt{p}}.$$

Il en résulte

$$f_1 p = r_1 \cos(v_1 - v) + er_1 \cos v_1,$$

c'est-à-dire, en remplaçant $e\cos v_1$ par $\frac{p}{r_1} - 1$ et réduisant,

$$f_1 = 1 - \frac{2r_1}{p}\sin^2\frac{v_1 - v}{2},$$

ce qui peut s'écrire encore, d'après la valeur de g_1,

$$f_1 = 1 - \frac{g_1^2}{2r^2r_1}\,\text{séc}^2\frac{v_1 - v}{2}.$$

En rassemblant ici les formules le mieux appropriées au cas où les positions M et M_1 sont rapprochées l'une de l'autre, et où l'on suppose connus a, p, r, r_1 et τ_1, on aura, d'après les équations (2) et (f) du n° 28, et d'après les formules précédentes, en appelant de plus β_1 la valeur de la fonction β que la Table V fait correspondre à l'argu-

ment $\frac{u_1 - u}{2}$,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &g_1 = \tau_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{g_1\beta_1}{\sqrt{rr_1}}\,\text{séc}\,\frac{v_1 - v}{2}\,\text{séc}^{\frac{1}{5}}\,\frac{u_1 - u}{2}\right)^3,\\ &\sin(v_1 - v) = \frac{g_1\sqrt{p}}{rr_1}, \qquad \sin\frac{u_1 - u}{2} = \frac{g_1}{2\sqrt{arr_1}}\,\text{séc}\,\frac{v_1 - v}{2},\\ &f_1 = 1 - \frac{g_1^2}{2r^2r_1}\,\text{séc}^2\,\frac{v_1 - v}{2}. \end{aligned}\right.$$

Comme nous l'avons déjà dit, ces formules permettent un développement rapide, par approximations successives, des inconnues suivant les puissances de la quantité $\tau_1(rr_1)^{-\frac{3}{4}}$, qui est du même ordre de grandeur que la différence $v_1 - v$, et qui par suite est supposée petite. Presque toujours on pourra supprimer le facteur β_1 en remplaçant par $\frac{1}{6}$ le coefficient $\frac{1}{2}$ du second terme de g_1. Dans le cas d'une orbite hyperbolique, les modifications que doivent subir les formules (3) sont intuitives, d'après ce qui a déjà été dit.

On a des formules toutes semblables pour calculer g_2 et f_2, et aussi g.

Nous serons amenés à poser

$$g_1 = \tau_1 + \frac{\gamma_1}{r^3}, \qquad f_1 = 1 + \frac{\varphi_1}{r^3}, \qquad \ldots, \qquad g = \tau + \frac{\gamma}{r^3}.$$

On a alors

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\gamma_1 = -\frac{1}{2}\left[g_1\beta_1\sqrt{\frac{r}{r_1}}\,\text{séc}\,\frac{v_1 - v}{2}\,\text{séc}^{\frac{1}{5}}\,\frac{u_1 - u}{2}\right]^3,\\ &\varphi_1 = -\frac{1}{2}\left[g_1\sqrt{\frac{r}{r_1}}\,\text{séc}\,\frac{v_1 - v}{2}\right]^2,\\ &\gamma = -\frac{1}{2}\left[g\beta\,\frac{r}{\sqrt{r_1r_2}}\,\text{séc}\,\frac{v_2 - v_1}{2}\,\text{séc}^{\frac{1}{5}}\,\frac{u_2 - u_1}{2}\right]^3, \end{aligned}\right.$$

les notations du numéro précédent s'appliquant à γ.

30. Cherchons maintenant les expressions explicites de f_1 et g_1 en fonction de τ_1 et de x, y, z, x', y', z'. Ces expressions ne peuvent être obtenues commodément que sous forme de séries dont la formation est simple. En mettant pour x_1, y_1, z_1 leurs valeurs $f_1x + g_1x'$, ...

dans les équations du mouvement telles que

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau_1^2} + \frac{x_1}{r_1^3} = 0,$$

on en déduit immédiatement que f_1 et g_1 vérifient les deux équations différentielles

$$(5) \qquad \frac{d^2 f_1}{d\tau_1^2} + \frac{f_1}{r_1^3} = 0, \qquad \frac{d^2 g_1}{d\tau_1^2} + \frac{g_1}{r_1^3} = 0,$$

avec la condition

$$r_1^2 = r^2 f_1^2 + 2 r r' f_1 g_1 + V^2 g_1^2,$$

que l'on obtient en ajoutant les carrés des expressions de x_1, y_1, z_1, et reprenant les notations du n° 27. De plus, il est clair que pour $\tau_1 = 0$, les fonctions f_1 et g_1 se réduisent respectivement à 1 et 0, tandis que leurs dérivées $\frac{df_1}{d\tau_1}$ et $\frac{dg_1}{d\tau_1}$ deviennent 0 et 1.

Tout revient donc à chercher les développements suivant les puissances de τ_1 des solutions des équations (5) définies par les conditions initiales précédentes. La solution de cette question est facile de bien des façons, par exemple en appliquant une méthode d'approximations successives. Remarquons d'abord que la dérivée $\frac{d^2 g_1}{d\tau_1^2}$, égale à $-\frac{g_1}{r_1^3}$, est nulle pour $\tau_1 = 0$, de sorte qu'on peut partir pour les inconnues des valeurs

$$f_1 = 1 + 0.\tau_1 + \ldots, \qquad g_1 = \tau + 0.\tau_1^2 + \ldots;$$

on a alors successivement

$$r_1^2 = r^2 \left(1 + \frac{2r'}{r}\tau_1 + \ldots\right),$$

$$\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 - 3\frac{r'}{r}\tau_1 + \ldots\right),$$

$$\frac{f_1}{r_1^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 - \frac{3r'}{r}\tau_1 + \ldots\right), \qquad \frac{g_1}{r_1^3} = \frac{1}{r^3}\left(\tau_1 - \frac{3r'}{r}\tau_1^2 + \ldots\right);$$

intégrant deux fois ces expressions changées de signe, ainsi que l'indiquent les équations (5), on a les développements plus complets

$$f_1 = 1 - \frac{\tau_1^2}{2r^3} + \frac{r'}{2r^4}\tau_1^3 + \ldots, \qquad g_1 = \tau_1 - \frac{\tau_1^3}{6r^3} + \frac{r'}{4r^4}\tau_1^4 + \ldots.$$

Recommençant de la même façon, on trouve les développements plus que suffisants

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} f_1 &= 1 - \frac{\tau_1^2}{2r^3} + \frac{r'\tau_1^3}{2r^4} - \frac{\tau_1^4}{24r^6}(2+15rr'^2-3rV^2) \\ &\quad + \frac{r'\tau_1^5}{8r^7}(2+7rr'^2-3rV^2)+\ldots, \\ g_1 &= \tau_1 - \frac{\tau_1^3}{6r^3} + \frac{r'\tau_1^4}{4r^4} - \frac{\tau_1^5}{40r^6}\left(\frac{8}{3}+15rr'^2-3rV^2\right) \\ &\quad + \frac{r'\tau_1^6}{12r^7}\left(\frac{5}{2}+7rr'^2-3rV^2\right)+\ldots. \end{aligned}\right.$$

Les expressions de f_1 et de $\frac{g_1}{\tau_1}$ sont en réalité ordonnées suivant les puissances de $\tau_1 r^{-\frac{3}{2}}$, et les coefficients sont alors des polynomes entiers par rapport à rr'^2 et rV^2, en ajoutant toutefois que les puissances impaires de τ_1 sont toujours accompagnées du facteur $r'\sqrt{r}$. Comme on doit nécessairement s'y attendre, ces quantités $r'\sqrt{r}$ et et rV^2 sont de purs nombres, et en effet on a, d'après le n° 27,

$$r'\sqrt{r} = e\sin v\sqrt{\frac{r}{p}}, \qquad rV^2 = 2 - \frac{r}{a}.$$

On voit encore que la convergence des séries précédentes est notablement augmentée par la petitesse de r', c'est-à-dire soit par la petitesse de l'excentricité e, soit par celle de $\sin v$.

Les quantités f_2 et g_2 ont des développements semblables : il suffit de remplacer τ_1 par τ_2. Quant à g ou $f_1 g_2 - f_2 g_1$, ce coefficient se développe alors suivant les puissances de τ_1 et τ_2; on a d'ailleurs $\tau = \tau_2 - \tau_1$, et il est clair, par raison de symétrie, que le rapport $\frac{g}{\tau}$ se développe suivant les puissances de $\tau_1 + \tau_2$ et de $\tau_1\tau_2$, ou encore de $\tau_1 + \tau_2$ et τ^2; de plus, la différence $g - \tau$ contient nécessairement τ^3 en facteur, ainsi que le montre la valeur (4) de γ. En n'écrivant que les premiers termes, on a

$$(7)\quad \begin{aligned} g &= \tau - \frac{\tau^3}{6r^3} + \frac{r'}{4r^4}\tau^3(\tau_1+\tau_2) - \frac{\tau^5}{240r^6}(1+15rr'^2-3rV^2) \\ &\quad - \frac{\tau^3(\tau_1+\tau_2)^2}{16r^6}(1+5rr'^2-rV^2)+\ldots; \end{aligned}$$

on voit ainsi que la convergence de g se trouve encore augmentée si

la somme $\tau_1 + \tau_2$ est petite par rapport à τ, c'est-à-dire si l'époque t est sensiblement équidistante des deux époques t_1 et t_2.

Les formules (6) et (7) mettent en évidence une observation qui est essentielle dans le problème de la détermination des orbites, et que nous aurions déjà pu faire sur les formules (3) et (4). Supposons les quantités τ, τ_1, τ_2 exactement connues, tandis qu'au contraire les éléments de l'orbite dont on dérive r, r', V, ou bien r, r_1, r_2, a, p ne sont donnés qu'à une erreur près d'ordre i, par exemple, par rapport à $\tau r^{-\frac{3}{2}}$, que nous regardons comme du premier ordre. Dans ces conditions, il est clair que les rapports $\frac{g}{\tau}$, $\frac{g_1}{\tau_1}$, $\frac{g_2}{\tau_2}$ sont, de même que f_1 et f_2, connus avec une erreur de l'ordre $i+2$; mais si l'on envisage les quotients $\frac{\gamma}{\tau^3}$, $\frac{\gamma_1}{\tau_1^3}$, $\frac{\gamma_2}{\tau_2^3}$, $\frac{\varphi_1}{\tau_1^2}$, $\frac{\varphi_2}{\tau_2^2}$, ils sont déterminés avec une erreur de l'ordre $i+1$, que diminuera la petitesse de r', c'est-à-dire de $e \sin v$, et qui devient de l'ordre $i+2$, si ce facteur est nul; et il en est de même pour $\frac{\gamma}{\tau^3}$ si l'on est dans le cas particulier signalé plus haut, où la somme $\tau_1 + \tau_2$ est petite par rapport à τ.

31. Bien que cela ne soit d'aucune utilité pratique pour nous, il est intéressant de déterminer le rayon de convergence des séries qui représentent f_1 et g_1, c'est-à-dire aussi celui des séries qui donnent x_1, y_1, z_1. C'est la question, résolue pour la première fois dans toute sa généralité par M. F.-R. Moulton (*Astronomical Journal*, vol. XXIII), de la convergence des séries du mouvement képlérien, ordonnées suivant les puissances du temps.

Considérons d'abord le cas très simple de la parabole; en introduisant, au lieu du temps, la variable équivalente P, on a

$$P = \operatorname{tang} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{v}{2},$$

de sorte que $\operatorname{tang} \frac{v}{2}$ est une fonction algébrique de P dont les points singuliers à distance finie sont déterminés par l'équation

$$\frac{dP}{d\left(\operatorname{tang} \frac{v}{2}\right)} = 1 + \operatorname{tang}^2 \frac{v}{2} = 0.$$

En faisant $i = \sqrt{-1}$, ces points singuliers sont donc

$$P_{\pm 1} = \pm \frac{2i}{3}.$$

Si P_0 est la valeur réelle de P qui correspond à la date t_0, la fonction $\tang \frac{v}{2}$, et toutes celles qui en dérivent sans introduire de nouveaux points singuliers, comme $x, y, z, r, \ldots$, sont développables en séries ordonnées suivant les puissances de $P - P_0$, dont le rayon de convergence est évidemment le module de la différence $P_0 - P_{\pm 1}$, c'est-à-dire $\sqrt{P_0^2 + \frac{4}{9}}$.

Dans le cas de l'ellipse, on a, suivant les notations habituelles,

$$M = u - e \sin u,$$

de sorte que u est une certaine fonction de M dont les points singuliers à distance finie sont déterminés par l'équation

$$\frac{dM}{du} = 1 - e \cos u = 0.$$

Si α est le nombre positif dont le cosinus hyperbolique est $\frac{1}{e}$, on a par suite, pour ces points singuliers, en désignant par h un entier quelconque,

$$u_{\pm h} = 2h\pi \pm i\alpha,$$
$$M_{\pm h} = 2h\pi \pm i(\alpha - \operatorname{th} \alpha).$$

Il est d'ailleurs facile de s'assurer que tous ces points singuliers appartiennent bien à la branche de la fonction u que nous devons seule considérer, savoir celle qui s'annule en même temps que M. En effet, dans le plan qui sert à représenter les valeurs complexes de M, suivons, pour aller de l'origine au point $M_{\pm h}$, un chemin composé : 1° du segment de l'axe réel partant de l'origine pour aboutir au point d'affixe $2h\pi$; 2° un segment parallèle à l'axe imaginaire, allant de ce dernier point jusqu'en $M_{\pm h}$, et le long duquel on a $M = 2h\pi + i\beta$, β variant de 0 à $\pm(\alpha - \operatorname{th}\alpha)$. La fonction u, partant de la valeur initiale zéro, sera réelle le long du premier segment, et arrivera à son extrémité avec la valeur $2h\pi$; puis, si on la désigne par $2h\pi + x + iy$, x et y étant réels, le long du deuxième segment, on aura

$$x + iy - e \sin(x + iy) = i\beta,$$

c'est-à-dire

$$x - e \sin x \operatorname{ch} y = 0,$$
$$y - e \cos x \operatorname{sh} y = \beta.$$

Comme la valeur initiale de x est nulle, on a constamment $x = 0$, d'après la première équation, qui représente une courbe dont la seule branche passant par l'origine est l'axe des y, et par suite il reste

$$y - e \operatorname{sh} y = \beta;$$

on voit alors que y croît ou décroît, suivant le cas, jusqu'à $\pm \alpha$, de façon que u prend finalement la valeur singulière $u_{\pm h}$.

Si M_0 est la valeur réelle de M qui correspond à la date t_0, la fonction u et celles qui en dépendent sans introduire de nouvelles singularités, comme $x, y, z, r, \ldots$ sont développables en séries ordonnées suivant les puissances de $M - M_0$, dont le rayon de convergence est la distance du point d'affixe M_0 au plus rapproché des points singuliers $M_{\pm h}$; si l'on suppose M_0 compris entre $-\pi$ et $+\pi$, le rayon cherché est donc

$$\sqrt{M_0^2 + (\alpha - \operatorname{th} \alpha)^2}.$$

En fonction explicite de e, on a immédiatement, en désignant par la caractéristique L les logarithmes hyperboliques arithmétiques,

$$\alpha - \operatorname{th} \alpha = \mathrm{L} \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e} - \sqrt{1 - e^2}.$$

Dans le cas de l'hyperbole, on peut écrire aussi bien

$$e \sin u - u = i M',$$

en faisant $M' = k(-a)^{-\frac{3}{2}}(t - T)$, et désignant toujours par u l'anomalie excentrique, ici purement imaginaire, quand M′ est une quantité réelle.

Pour déterminer les points singuliers de la fonction u, on a encore l'égalité

$$e \cos u - 1 = 0,$$

de sorte que si α est l'angle positif aigu dont le cosinus est $\frac{1}{e}$, on a pour les points singuliers cherchés

$$u_{\pm h} = 2h\pi \pm \alpha,$$
$$M'_{\pm h} = i[2h\pi \pm (\alpha - \operatorname{tang} \alpha)].$$

Pour obtenir comme précédemment le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances de $M' - M'_0$ qui représentent la fonction u et celles qui en dépendent, M'_0 étant la valeur réelle de M' qui correspond à la date t_0, il faut calculer la distance du point d'affixe M'_0 au plus rapproché des points $M'_{\pm h}$ qui sont effectivement points singuliers pour la branche de la fonction u qui s'annule en même temps que M'. Pour reconnaître ces points, faisons varier M' par valeurs de la forme $\varepsilon + i\beta$, ε étant une quantité infiniment petite, et β étant quelconque; faisons en même temps $u = x + iy$, de sorte que l'on aura en particulier

$$e \cos x \operatorname{sh} y - y = \varepsilon.$$

Cette équation définit une courbe qui est le lieu géométrique du point d'affixe u dans le plan correspondant; mais nous ne devons considérer que la branche de cette courbe qui passe très près de l'origine, puisque seule elle correspond à la branche de la fonction u qui s'annule avec M'. Cette branche est facile à tracer, et comme elle est comprise entre les deux asymptotes d'équations $x = \pm \frac{\pi}{2}$, les seules valeurs singulières de u représentées par des points situés dans son voisinage immédiat sont les valeurs $u_{\pm 0}$, ou $\pm \alpha$, qui correspondent à $h = 0$. Donc, finalement, les seuls points singuliers pour la branche de fonction considérée sont les points

$$M'_{\pm 0} = \pm i(\alpha - \operatorname{tang} \alpha).$$

Le rayon de convergence cherché est par suite

$$\sqrt{M_0'^2 + (\alpha - \operatorname{tang} \alpha)^2},$$

et en fonction explicite de e, on a

$$\operatorname{tang} \alpha - \alpha = \sqrt{e^2 - 1} - \operatorname{arc\,tang} \sqrt{e^2 - 1},$$

l'arc tangente étant positif et aigu.

Dans les deux cas de l'ellipse et de l'hyperbole, quand on remplace M ou M' par $P(1 - e)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}$, ou $P'(e - 1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}$, et que l'on fait tendre e vers l'unité, on retrouve immédiatement la valeur spéciale du rayon de convergence qui convient au cas de la parabole.

32. Nous rencontrerons, au Chapitre suivant, un système de deux

équations simultanées de la forme

$$\rho = P + \frac{Q + q\rho}{r^3}, \qquad r^2 = \rho^2 + 2S\rho + R^2,$$

dans lesquelles les deux inconnues ρ et r sont assujetties à la seule condition d'être positives, et où les coefficients vérifient les conditions suivantes : les égalités

$$q = 0, \qquad Q = -PR^3$$

sont très près d'être vérifiées, et l'on a en outre

$$S^2 \leqq R^2, \qquad R > 0.$$

Nous allons dès maintenant discuter ce système fondamental dans le problème de la détermination des orbites, en supposant toutefois exactement vérifiées les deux conditions ci-dessus relatives aux coefficients q et Q. Tout revient à chercher le nombre des racines positives de l'équation

$$\rho = P - PR^3(\rho^2 + 2S\rho + R^2)^{-\frac{3}{2}},$$

le radical qui figure ici étant positif, ce qui revient à dire que l'on a $\frac{\rho}{P} < 1$. Cette équation rendue entière devient

$$f(\rho) = \rho f_1(\rho) = (\rho - P)^2(\rho^2 + 2S\rho + R^2)^3 - P^2R^6 = 0;$$

elle est du huitième degré, mais admet une racine nulle. Il s'agit de savoir combien elle a de racines positives, vérifiant en outre la condition $\rho < P$, si P est une quantité positive.

En désignant par $f'(\rho)$ la dérivée de $f(\rho)$, on a

$$f'(\rho) = 2(\rho - P)(\rho^2 + 2S\rho + R^2)^2[4\rho^2 + (5S - 3P)\rho + R^2 - 3PS],$$

et comme $\rho^2 + 2S\rho + R^2$ ne peut s'annuler d'après l'hypothèse faite sur S, on voit que l'équation $f'(\rho) = 0$ a au plus trois racines réelles; par suite, l'équation $f(\rho) = 0$ a au plus quatre racines réelles, et l'équation du septième degré $f_1(\rho) = 0$ en a au plus trois.

On a en outre

$$f_1(P) = -PR^6, \qquad f_1(0) = 2PR^4(3PS - R^2),$$

le premier coefficient de $f_1(\rho)$ étant d'ailleurs positif.

Si l'on a $P < 0$, l'équation $f_1(\rho) = 0$ a au moins une racine infé-

rieure à P, et par suite deux racines positives au plus; elle en a une et une seule si $3PS > R^2$.

Si l'on a $P > 0$, l'équation a au moins une racine supérieure à P, et par suite au plus deux racines positives et inférieures à P; elle en a une et une seule encore sous la condition $3PS > R^2$.

En résumé, l'équation proposée en ρ

$$\rho = P - PR^3(\rho^2 + 2S\rho + R^2)^{-\frac{3}{2}}$$

a au plus deux racines positives; elle en a une et une seule sous la condition $3PS > R^2$.

Pour aller plus loin dans cette étude, et faciliter le calcul des racines acceptables, faisons

$$\frac{\rho}{R} = m, \qquad p = \frac{R}{P}, \qquad \sigma = \frac{S}{R},$$

de sorte que

$$mp = 1 - (m^2 + 2\sigma m + 1)^{-\frac{3}{2}},$$

et considérons σ comme une quantité donnée inférieure ou égale à l'unité en valeur absolue.

Si l'on regarde m et p comme les coordonnées d'un point dans un plan par rapport à des axes om, op, construisons la courbe définie par cette équation, m étant positif, ainsi que le radical : cette courbe, nous le savons d'après ce qui précède, ne peut être coupée par une parallèle à l'axe om qu'en deux points au plus.

En supposant m très petit, un développement en série très simple donne

$$p = 3\sigma + \frac{3}{2}(1 - 5\sigma^2)m + \ldots,$$

et par suite la courbe part d'un point d'ordonnée 3σ situé sur l'axe op, avec une tangente dont le coefficient angulaire est positif ou négatif, suivant que la quantité σ^2 est inférieure ou supérieure à $\frac{1}{5}$.

En excluant le cas limite où $\sigma = -1$, la fonction p est continue pour toutes les valeurs positives de m, et tend vers zéro par valeurs positives quand m devient infini; elle s'annule une seule fois pour $m = -2\sigma$, si l'on a $\sigma \leqq 0$.

Ces remarques suffisent pour tracer la courbe, qui a nécessairement, suivant les cas, l'une des formes générales ci-contre (*fig.* 4) :

La forme I correspond à $-1 < \sigma < -\frac{1}{\sqrt{5}}$; la forme II à $-\frac{1}{\sqrt{5}} < \sigma < 0$; la forme III à $0 < \sigma < \frac{1}{\sqrt{5}}$; la forme IV à $\frac{1}{\sqrt{5}} < \sigma \leqq 1$; d'ailleurs $\frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447\ldots$.

L'ensemble de ces courbes n'a pas d'enveloppe autre que l'asymptote om.

Dans tous les cas, on voit qu'à une valeur de p comprise entre 0 et 3σ correspond une valeur de m et une seule : c'est la condition trouvée ci-dessus pour que l'équation proposée admette une racine acceptable unique.

La Table VII des pages 140 et 141 donne, pour σ variant de dixième en dixième depuis -1 jusqu'à $+1$, les valeurs de p qui correspondent à des valeurs de m variant de deux en deux dixièmes depuis 0 jusqu'à 4 : elle permettrait de construire les courbes précédentes avec une grande exactitude; mais son but principal est de fournir à simple vue, pour des valeurs données de σ et de p, des valeurs assez approchées des racines acceptables de l'équation proposée, pour qu'on puisse aisément continuer leur calcul par les méthodes générales d'approximation.

Si par exemple on veut appliquer la méthode de Newton à l'équation primitivement donnée, mise sous la forme

$$F(\rho) = \rho - P - \frac{Q + q\rho}{r^3} = 0, \qquad r = \sqrt{\rho^2 + 2S\rho + R^2},$$

il suffira de savoir calculer la dérivée

$$F'(\rho) = 1 - \frac{q}{r^3} + \frac{3(Q + q\rho)(\rho + S)}{r^5}.$$

Si cette quantité est petite, c'est-à-dire si l'équation a deux racines voisines, le calcul demandera, bien entendu, quelques précautions, et ne conduira qu'à une faible précision; mais ce cas ne se présente guère dans la pratique.

Fig. 4.

TABLE VII.

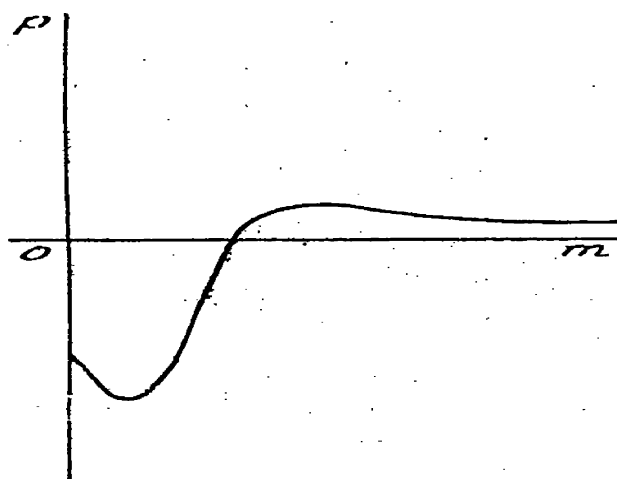
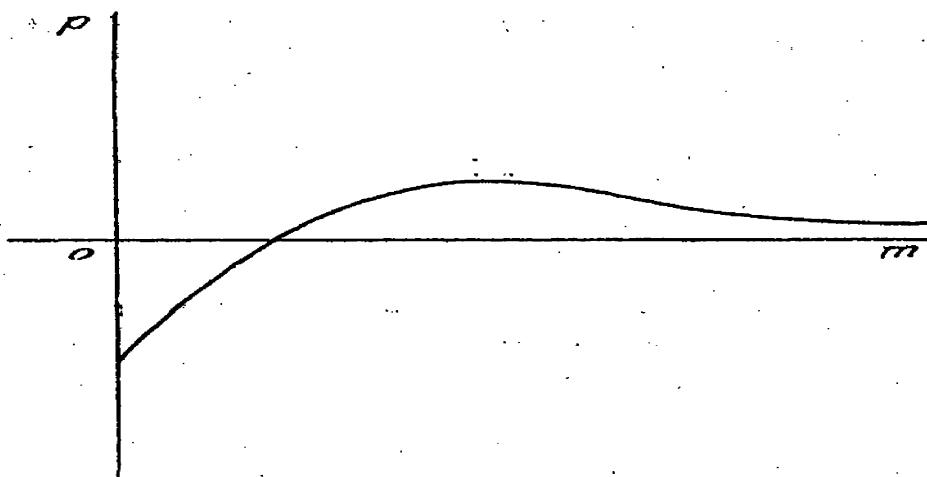
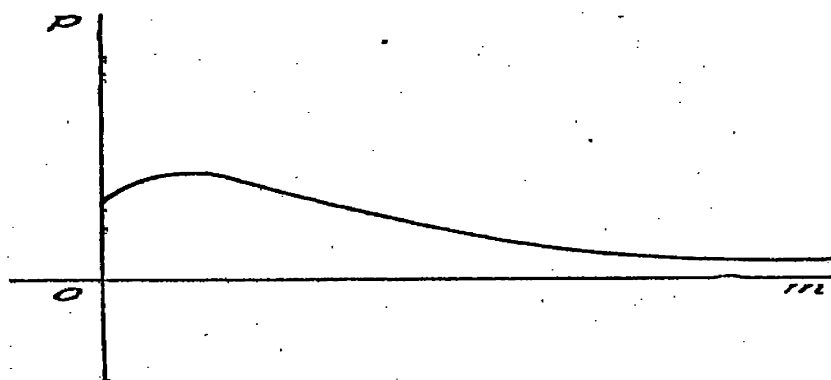
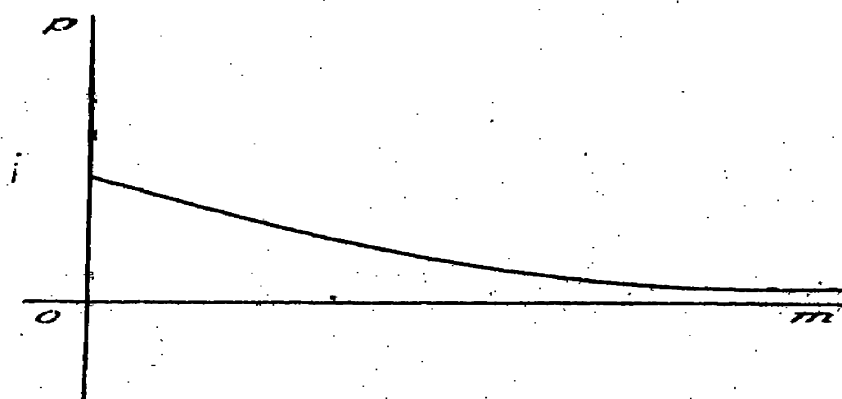
p

m \ σ	−1,0	−0,9	−0,8	−0,7	−0,6	−0,5	−0,4	−0,3	−0,2	−0,1	0,0
0,0	− 3,00	−2,70	−2,40	−2,10	−1,80	−1,50	−1,20	−0,90	−0,60	−0,30	0,00
0,2	− 4,77	−3,92	−3,18	−2,55	−1,99	−1,49	−1,06	−0,67	−0,32	0,00	0,29
0,4	− 9,08	−6,07	−4,17	−2,88	−1,96	−1,27	−0,75	−0,33	0,00	0,27	0,50
0,6	− 24,4	−9,58	−4,92	−2,78	−1,59	−0,85	−0,35	0,00	0,26	0,46	0,62
0,8	−155	−12,7	−4,54	−2,08	−0,98	−0,37	0,00	0,25	0,43	0,56	0,65
1,0	− ∞	−10,2	−2,95	−1,15	−0,40	0,00	0,24	0,40	0,51	0,59	0,65
1,2	− 10,3	−4,79	−1,39	−0,42	0,00	0,23	0,37	0,46	0,53	0,58	0,61
1,4	− 10,5	−1,73	−0,45	0,00	0,22	0,35	0,43	0,48	0,52	0,55	0,57
1,6	− 2,27	−0,49	0,00	0,21	0,33	0,40	0,44	0,48	0,50	0,52	0,53
1,8	− 0,53	0,00	0,21	0,31	0,37	0,41	0,44	0,46	0,47	0,48	0,49
2,0	0,00	0,20	0,29	0,35	0,38	0,40	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46
2,2	0,19	0,28	0,33	0,36	0,38	0,39	0,40	0,41	0,41	0,42	0,42
2,4	0,26	0,31	0,33	0,35	0,36	0,37	0,38	0,38	0,39	0,39	0,39
2,6	0,29	0,31	0,33	0,34	0,35	0,35	0,36	0,36	0,36	0,37	0,37
2,8	0,30	0,31	0,32	0,32	0,33	0,33	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34
3,0	0,29	0,30	0,31	0,31	0,31	0,32	0,32	0,32	0,32	0,32	0,32
3,2	0,28	0,29	0,29	0,29	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30
3,4	0,27	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,29	0,29	0,29	0,29
3,6	0,26	0,26	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27
3,8	0,25	0,25	0,25	0,25	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
4,0	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25

TABLE VII (*suite*).

m \ σ	p 0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	0,00	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3,00
0,2	0,29	0,54	0,78	1,00	1,20	1,38	1,55	1,70	1,85	1,98	2,11
0,4	0,50	0,69	0,85	0,99	1,11	1,22	1,31	1,39	1,46	1,53	1,59
0,6	0,62	0,74	0,84	0,93	1,00	1,06	1,11	1,16	1,20	1,23	1,26
0,8	0,65	0,73	0,79	0,85	0,89	0,92	0,95	0,98	1,00	1,02	1,04
1,0	0,65	0,69	0,73	0,76	0,79	0,81	0,83	0,84	0,85	0,87	0,88
1,2	0,61	0,64	0,67	0,69	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76
1,4	0,57	0,59	0,61	0,62	0,63	0,64	0,64	0,65	0,65	0,66	0,66
1,6	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57	0,57	0,58	0,58	0,58	0,59	0,59
1,8	0,49	0,50	0,50	0,51	0,51	0,52	0,52	0,52	0,53	0,53	0,53
2,0	0,46	0,46	0,46	0,47	0,47	0,47	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48
2,2	0,42	0,43	0,43	0,43	0,43	0,43	0,44	0,44	0,44	0,44	0,44
2,4	0,39	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,41	0,41
2,6	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,38	0,38	0,38
2,8	0,34	0,34	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35
3,0	0,32	0,32	0,32	0,33	0,35	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33
3,2	0,30	0,30	0,31	0,31	0,31	0,31	0,31	0,31	0,31	0,31	0,31
3,4	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29
3,6	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27
3,8	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
4,0	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25

CHAPITRE VII.

DÉTERMINATION D'UNE ORBITE KÉPLÉRIENNE PAR TROIS OBSERVATIONS RAPPROCHÉES.

---

33. Puisque l'orbite supposée képlérienne d'un astéroïde ou d'une comète M dépend de six éléments, il est clair qu'elle sera généralement déterminée par trois observations du point M, faites à trois époques connues, en des lieux terrestres donnés, et fournissant les deux coordonnées angulaires du point M vu successivement de chacun de ces lieux.

C'est ce problème général, d'une importance capitale en Astronomie, dont nous allons donner une solution dans ce Chapitre, en nous inspirant des récents travaux de MM. C.-L. Charlier (1) et F.-R. Moulton (2), qui ont mis en pleine lumière l'excellence de la méthode proposée par Lagrange en 1778, et trop oubliée depuis [*Sur le problème de la détermination des orbites des comètes d'après trois observations* (*Œuvres de Lagrange*, t. IV, p. 439)]. Dans l'exposition que nous allons présenter, nous chercherons à réunir les avantages des diverses méthodes classiques, celle de Gauss, et celle de Laplace récemment reprise par M. A.-O. Leuschner (*Publications of the Lick Observatory*, vol. VII).

Le problème ne peut être résolu que par approximations successives, car une solution directe générale présenterait des difficultés pratiquement insurmontables : la convergence de ces approximations sera d'autant plus grande que les observations seront plus rapprochées ; mais, d'autre part, il est évident qu'un rapprochement exagéré des observations diminue la précision des résultats. Sans insister davantage pour le moment sur ces points, nous supposerons d'une façon

---

(1) *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, Band 7.
(2) *Astronomical Journal*, vol. XXVIII.

générale dans ce qui suit que les intervalles de temps qui séparent les observations sont petits, en nous réservant le soin de préciser plus tard l'ordre de cette petitesse.

34. Il faut d'abord indiquer comment on doit utiliser les données. Les coordonnées observées, celles qui sont publiées par l'observateur, sont toujours l'ascension droite et la déclinaison apparentes, α', δ', au lieu d'observation P, pour une date t', indiquée généralement en temps moyen local, mais que nous supposerons toujours rapportée à un même méridien déterminé, et exprimée en jours moyens.

Ces données sont utilisées de deux façons bien distinctes, suivant que l'on ignore complètement la distance MP ou bien au contraire que l'on connaît celle-ci avec une approximation suffisante pour calculer le temps d'aberration et la parallaxe de M. Plaçons-nous d'abord dans ce second cas. En premier lieu, on corrigera les coordonnées α', δ' de la parallaxe, de façon à ramener l'observation au centre de la Terre, O'; on y arrive de la façon bien connue suivante. Soient t'_s le temps sidéral local au moment de l'observation, φ' la latitude géocentrique du lieu P, ρ' la distance O'P de ce lieu au centre de la Terre, rapportée au rayon équatorial terrestre comme unité; ces deux dernières quantités résultent de la latitude géographique φ de P; les *facteurs de la parallaxe*, qui sont publiés d'ailleurs en même temps que l'observation, exprimés le premier en secondes de temps, le deuxième en secondes d'arc, sont

$$P_\alpha = \frac{1}{15}\varpi_0\rho'\cos\varphi'\sec\delta'\sin(t'_s - \alpha'),$$

$$P_\delta = \varpi_0\rho'\sin\varphi'\cos\delta' - \varpi_0\rho'\cos\varphi'\sin\delta'\cos(t'_s - \alpha'),$$

en appelant ϖ_0 la parallaxe horizontale équatoriale moyenne du Soleil, égale à 8",80.

Pour corriger l'observation de la parallaxe, il suffit alors d'ajouter à α' et δ' les deux quantités $\frac{P_\alpha}{\rho}$, $\frac{P_\delta}{\rho}$, en désignant par ρ la distance O'M qui est supposée connue d'une façon suffisamment approchée.

En second lieu, on corrigera la date t' du temps d'aberration, égal à $\varkappa\rho$, en appelant $\varkappa$ l'équation de la lumière déjà considérée précédemment, et l'on substituera à la date t' la date $t = t' - \varkappa\rho$; pour cette date, les coordonnées α', δ', corrigées de la parallaxe, sont des coor-

données vraies. Il convient alors de choisir comme éléments de référence l'équinoxe et l'équateur moyens du commencement de l'année tropique à laquelle appartiennent les dates des trois observations, ou qui commence entre ces dates : ceci se fera, comme nous l'avons déjà vu, en appliquant encore à α' et δ' les nouvelles corrections

$$-\frac{1}{15}[f+g\tang\delta'\sin(G+\alpha')], \quad -g\cos(G+\alpha'),$$

où f, g, G sont les constantes connues de la réduction au jour, si du moins on réduit au commencement de l'année à laquelle appartient la date t'; si l'on doit réduire au contraire à la fin de cette même année, il faudra commencer de la même façon, puis appliquer encore la précession pour la durée de cette année, soit ajouter les deux quantités

$$\frac{1}{15}(m+n\tang\delta'\sin\alpha'), \quad n\cos\alpha',$$

respectivement, en désignant toujours par m et n les précessions annuelles à l'époque considérée en ascension droite et en déclinaison.

Finalement, en appelant α et δ l'ascension droite et la déclinaison que l'on obtient après ces diverses corrections, on a les coordonnées angulaires de la direction O'M à la date corrigée t, pour les éléments de référence indiqués. Si alors X, Y, Z sont les coordonnées rectilignes correspondantes du Soleil pour la date t, telles qu'on les trouve dans les éphémérides; si l'on désigne toujours O'M par ρ, et que l'on appelle x, y, z les coordonnées rectilignes équatoriales héliocentriques de M à la date t, on a les trois équations

$$\rho\cos\delta\cos\alpha = x+X, \qquad \rho\cos\delta\sin\alpha = y+Y, \qquad \rho\sin\delta = z+Z.$$

A la vérité, quand on réduit non pas à l'équinoxe du commencement, mais à celui de la fin de l'année à laquelle appartient la date t, on ne trouve pas en général immédiatement les valeurs de X, Y, Z dans les éphémérides, mais il suffit d'ajouter à celles relatives au commencement de l'année les corrections $-mY-nZ$, mX, nX, respectivement, m et n ayant toujours la même signification.

Signalons encore que, dans certains cas, on fait la réduction des observations au commencement de l'année décadaire la plus voisine :

les éphémérides donnent alors directement tout ce qui est nécessaire pour obtenir ce résultat.

Dans le premier cas, lorsque la distance MP est entièrement inconnue, on ne peut procéder de la même façon. Tout d'abord, au lieu de faire porter la correction de parallaxe sur les coordonnées observées, on la fait porter (et l'on pourrait faire de même dans le premier cas) sur les coordonnées du Soleil, en déterminant celles-ci non plus pour le centre O′ de la Terre, mais pour le lieu d'observation lui-même. A cet effet, il suffit d'ajouter aux coordonnées géocentriques X′, Y′, Z′ du Soleil, calculées cette fois pour la date même t' de l'observation, les coordonnées rectilignes équatoriales de O′ par rapport à P, qui sont évidemment

$$-\varpi_0 \rho' \cos\varphi' \cos t'_S, \qquad -\varpi_0 \rho' \cos\varphi' \sin t'_S, \qquad -\varpi_0 \rho' \sin\varphi',$$

la parallaxe ϖ_0 du Soleil étant ici exprimée en radians.

En réalité, les données t'_S et φ' sont l'ascension droite et la déclinaison géocentriques de O′P, rapportées à l'équinoxe et à l'équateur vrais de la date, de sorte qu'il faudrait leur appliquer la réduction de précession et de nutation pour les rapporter aux éléments de référence choisis; mais il est clair que la correction résultante serait insensible, au moins dans les conditions ordinaires.

En second lieu, la correction d'aberration porte sur la direction observée; celle-ci est corrigée de l'aberration des fixes, c'est-à-dire que pour la ramener en même temps au commencement de l'année à laquelle appartient la date t', on lui applique la réduction au jour complète, en ajoutant à α' et δ' les corrections

$$-\frac{1}{15}[f + g\sin(G+\alpha')\operatorname{tang}\delta' + h\sin(H+\alpha')\operatorname{séc}\delta'],$$

$$-[g\cos(G+\alpha') + h\cos(H+\alpha')\sin\delta' + i\cos\delta'],$$

exprimées comme précédemment, avec les notations habituelles.

Il y a d'ailleurs lieu ici, si l'on veut une grande précision, de tenir compte des termes complémentaires de l'aberration dus à l'excentricité du Soleil, c'est-à-dire d'ajouter encore aux corrections précédentes les termes très petits

$$-\frac{1}{15}h'\sin(H'+\alpha')\operatorname{séc}\delta', \quad -[h'\cos(H'+\alpha')\sin\delta' + i'\cos\delta'],$$

en faisant, entre les années 1800 et 2000,

$$h' = 0'',342, \qquad H' = 349^\circ,7 - 0^\circ,016\,t, \qquad i' = -0'',026 - 0'',00004\,t,$$

le temps t étant ici exprimé en années, à partir de 1900,0.

Finalement, désignons par α, δ l'ascension droite et la déclinaison observées corrigées comme nous venons de dire; par X, Y, Z les coordonnées du Soleil X', Y', Z' corrigées pour la parallaxe; par ρ la distance PM; par t la date t' diminuée du temps d'aberration inconnu $\varkappa\rho$; par x, y, z les coordonnées héliocentriques de M, à la date inconnue t, toujours rapportées aux mêmes axes. Comme on sait d'après la théorie générale de l'aberration planétaire que α, δ sont les coordonnées angulaires de la droite qui joint le lieu d'observation à la date t' et le point M à la date t, le Soleil étant regardé comme fixe dans l'espace, on a les mêmes trois équations que ci-dessus,

$$\rho\cos\delta\cos\alpha = x + X, \qquad \rho\cos\delta\sin\alpha = y + Y, \qquad \rho\sin\delta = z + Z.$$

Dans tous les cas, il serait facile d'employer d'autres éléments de référence, et d'introduire par exemple les coordonnées écliptiques, en s'arrangeant même de façon que la quantité Z fût exactement nulle; mais l'avantage qui peut en résulter paraît bien léger, en raison des calculs nouveaux qui deviennent alors nécessaires.

35. Supposons maintenant trois observations données, et conservant les notations précédentes pour l'une d'elles, marquons simplement des indices 1 et 2 respectivement toutes les quantités correspondantes relatives aux deux autres; faisons de plus

$$(1) \qquad \lambda = \cos\delta\cos\alpha, \qquad \mu = \cos\delta\sin\alpha, \qquad \nu = \sin\delta,$$

de sorte que λ, μ, ν sont les cosinus directeurs de la direction observée, convenablement corrigée.

Les données du problème sont, avec les dates des trois observations, les neuf cosinus tels que λ, μ, ν, et les neuf coordonnées du Soleil, telles que X, Y, Z. On a d'abord les neuf équations

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \lambda\rho = x + X, & \lambda_1\rho_1 = x_1 + X_1, & \lambda_2\rho_2 = x_2 + X_2, \\ \mu\rho = y + Y, & \mu_1\rho_1 = y_1 + Y_1, & \mu_2\rho_2 = y_2 + Y_2, \\ \nu\rho = z + Z, & \nu_1\rho_1 = z_1 + Z_1, & \nu_2\rho_2 = z_2 + Z_2. \end{array} \right.$$

Les dates t, t_1, t_2, auxquelles se rapportent les coordonnées héliocen-

triques $x, y, z, \ldots,$ sont ou bien connues, ou bien inconnues ; mais, dans ce dernier cas, si t', t'_1, t'_2 sont les dates mêmes des observations, on a

$$(3) \qquad t = t' - \varkappa\rho, \qquad t_1 = t'_1 - \varkappa\rho_1, \qquad t_2 = t'_2 - \varkappa\rho_2,$$

et les approximations successives conduiront rapidement, en raison de la petitesse de $\varkappa$, aux valeurs exactes de t, t_1, t_2, dont les premières valeurs approchées seront t', t'_1, t'_2.

Conformément aux notations du Chapitre précédent, faisons

$$(4) \qquad \tau_1 = k(t_1 - t), \qquad \tau_2 = k(t_2 - t), \qquad \tau = \tau_2 - \tau_1 = k(t_2 - t_1);$$

en règle générale, on choisira pour t la date intermédiaire, de sorte que τ_1 et τ_2 seront des quantités respectivement négative et positive, si du moins l'on a $t_1 < t < t_2$.

Aux équations (2), qui ne font que traduire les observations, il faut joindre de nouvelles relations qui expriment que les trois positions M, M_1, M_2 appartiennent à une même orbite képlérienne, aux dates t, t_1, t_2. Si x', y', z' sont les dérivées de x, y, z, pour l'époque t, calculées toujours comme il a été dit au Chapitre précédent, il est donc nécessaire et suffisant de vérifier les équations

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1 = f_1 x + g_1 x', & x_2 = f_2 x + g_2 x', \\ y_1 = f_1 y + g_1 y', & y_2 = f_2 y + g_2 y', \\ z_1 = f_1 z + g_1 z', & z_2 = f_2 z + g_2 z', \end{cases}$$

les coefficients f_1, g_1, f_2, g_2 étant les fonctions de x, y, z, x', y', z', ainsi que de τ_1 ou τ_2 que nous avons étudiées ci-dessus. Nous nous servirons aussi de la quantité analogue g, égale à $f_1 g_2 - f_2 g_1$.

Les neuf équations (2) et les six équations (5) forment un système de quinze équations à quinze inconnues, savoir $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \rho, \rho_1, \rho_2, x', y', z'$: une fois ces équations résolues, on pourra déterminer les éléments de l'orbite comme nous l'avons vu au Chapitre précédent, en partant soit de x, y, z, x', y', z', soit de $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$.

En éliminant tour à tour x', y', z' et x, y, z entre les équations (5), on les remplace par les deux groupes de trois équations

$$(6) \qquad \begin{cases} gx - g_2 x_1 + g_1 x_2 = 0, \\ gy - g_2 y_1 + g_1 y_2 = 0, \\ gz - g_2 z_1 + g_1 z_2 = 0, \end{cases}$$

et

$$(7)\qquad gx' = f_1 x_2 - f_2 x_1, \qquad gy' = f_1 y_2 - f_2 y_1, \qquad gz' = f_1 z_2 - f_2 z_1.$$

Ces nouvelles équations, jointes aux équations (2) écrites sous la forme

$$(8)\qquad \begin{cases} x = \lambda\rho - X, & x_1 = \lambda_1\rho_1 - X_1, & x_2 = \lambda_2\rho_2 - X_2, \\ y = \mu\rho - Y, & y_1 = \mu_1\rho_1 - Y_1, & y_2 = \mu_2\rho_2 - Y_2, \\ z = \nu\rho - Z, & z_1 = \nu_1\rho_1 - Z_1, & z_2 = \nu_2\rho_2 - Z_2, \end{cases}$$

forment un système équivalent au système donné. Les équations (6) elles-mêmes peuvent être remplacées par trois autres équations équivalentes que l'on obtiendra de la façon suivante. En y portant les expressions (8) des coordonnées $x, y, z, \ldots$, elles deviennent

$$(9)\qquad \begin{cases} \lambda g\rho - \lambda_1 g_2\rho_1 + \lambda_2 g_1\rho_2 = gX - g_2X_1 + g_1X_2, \\ \mu g\rho - \mu_1 g_2\rho_1 + \mu_2 g_1\rho_2 = gY - g_2Y_1 + g_1Y_2, \\ \nu g\rho - \nu_1 g_2\rho_1 + \nu_2 g_1\rho_2 = gZ - g_2Z_1 + g_1Z_2. \end{cases}$$

Regardant alors ρ, ρ_1, ρ_2 comme les seules inconnues, résolvons d'abord ces équations par rapport à ρ; si l'on fait

$$(10)\qquad \begin{cases} A = gX - g_2X_1 + g_1X_2, \qquad B = gY - g_2Y_1 + g_1Y_2, \\ \qquad C = gZ - g_2Z_1 + g_1Z_2, \\ \Delta = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu & \mu_1 & \mu_2 \\ \nu & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix} A & \lambda_1 & \lambda_2 \\ B & \mu_1 & \mu_2 \\ C & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \end{cases}$$

il vient

$$(11)\qquad \rho g\Delta = D.$$

Puis, supposant ρ connu, résolvons maintenant deux des équations (9), par exemple les deux premières, par rapport à ρ_2; on aura

$$(12)\qquad \rho_2 g_1(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) = \rho g(\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu) + \lambda_1 B - \mu_1 A;$$

et enfin tirons ρ_1 de l'une d'elles, soit la première, de façon que

$$(13)\qquad \rho_1 g_2\lambda_1 = \rho g\lambda + \rho_2 g_1\lambda_2 - A;$$

ou bien écrivons, en déterminant ρ_1 comme ρ_2,

$$(13\ bis)\qquad \rho_1 g_2(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) = \rho g(\lambda\mu_2 - \lambda_2\mu) + \lambda_2 B - \mu_2 A.$$

Les équations (11), (12) et (13) ou (13 *bis*) remplaceront les équations (6) ou (9).

Il convient encore de remarquer que l'on peut supprimer l'intermédiaire de $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, en ayant soin alors d'écrire les équations (7) sous la forme

$$(7\ bis)\qquad \begin{cases} gx' = f_1\lambda_2\rho_2 - f_2\lambda_1\rho_1 + f_2 X_1 - f_1 X_2, \\ gy' = f_1\mu_2\rho_2 - f_2\mu_1\rho_1 + f_2 Y_1 - f_1 Y_2, \\ gz' = f_1\nu_2\rho_2 - f_2\nu_1\rho_1 + f_2 Z_1 - f_1 Z_2. \end{cases}$$

Enfin, si l'on introduit le rayon vecteur r comme inconnue supplémentaire, on a, d'après les relations (8),

$$(14)\qquad r^2 = \rho^2 + 2S\rho + R^2 \qquad (r > 0),$$

en posant

$$(15)\qquad S = -(\lambda X + \mu Y + \nu Z), \qquad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \qquad (R > 0).$$

36. Avant d'indiquer l'usage des équations que nous venons d'établir, nous allons traiter un cas particulier qui nous montrera clairement quelle est la marche à suivre en général.

Imaginons que les quantités τ_1 et τ_2 étant très petites du premier ordre, on veuille développer la solution suivant les puissances de ces quantités, de sorte que si τ_1 et τ_2 tendent vers zéro, on tombe ainsi sur la méthode de Laplace.

Il convient tout d'abord, pour donner un sens précis à cette question, d'écrire λ_1 et λ_2 par exemple sous une forme qui fasse voir nettement que λ, λ_1, λ_2 sont les valeurs d'une même fonction du temps pour les époques t, t_1, t_2. On y réussit, et cela d'une façon symétrique, en faisant

$$\lambda_1 = \lambda + \lambda^{(1)}\tau_1 - \frac{\lambda^{(2)}}{2}\tau_1\tau_2,$$

$$\lambda_2 = \lambda + \lambda^{(1)}\tau_2 - \frac{\lambda^{(2)}}{2}\tau_1\tau_2,$$

les coefficients $\lambda^{(1)}$ et $\lambda^{(2)}$ étant déterminés par ces équations mêmes, de sorte que

$$\lambda^{(1)} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\tau}, \qquad \frac{\lambda^{(2)}}{2} = \frac{\tau\lambda - \tau_2\lambda_1 + \tau_1\lambda_2}{\tau\tau_1\tau_2};$$

ce sont des quantités finies, car si τ_1 et τ_2 tendent vers zéro, on voit

immédiatement que $\lambda^{(1)}$ et $\lambda^{(2)}$ tendent respectivement vers les dérivées première et seconde λ', λ'' de la fonction λ pour l'époque t, ces dérivées étant toujours prises par rapport au temps mesuré avec une unité égale à $\frac{1}{k}$ jours moyens. En effet, on a alors

$$\lambda_1 = \lambda + \lambda'\tau_1 + \frac{1}{2}\lambda''\tau_1^2 + \frac{1}{6}\lambda'''\tau_1^3 + \ldots,$$

$$\lambda_2 = \lambda + \lambda'\tau_2 + \frac{1}{2}\lambda''\tau_2^2 + \frac{1}{6}\lambda'''\tau_2^3 + \ldots,$$

d'où

$$\lambda^{(1)} = \lambda' + \frac{1}{2}\lambda''(\tau_1 + \tau_2) + \ldots, \qquad \lambda^{(2)} = \lambda'' + \frac{1}{3}\lambda'''(\tau_1 + \tau_2) + \ldots;$$

on voit de plus, par ces égalités, que les différences $\lambda^{(1)} - \lambda'$, $\lambda^{(2)} - \lambda''$ sont en général du premier ordre, et deviennent du second ordre dans le cas, que nous dirons spécial, où la quantité $\tau_1 + \tau_2$ peut être considérée elle-même comme du second ordre, c'est-à-dire lorsque les dates des trois observations sont très sensiblement équidistantes.

Nous emploierons des notations analogues pour représenter μ_1, μ_2, ν_1, ν_2, X_1, X_2, ...

Dans ces conditions, on a d'abord

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^{(1)} & \lambda^{(2)} \\ \mu & \mu^{(1)} & \mu^{(2)} \\ \nu & \nu^{(1)} & \nu^{(2)} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \tau_1 & -\frac{1}{2}\tau_1\tau_2 \\ 1 & \tau_2 & -\frac{1}{2}\tau_1\tau_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\tau\tau_1\tau_2 \,|\,\lambda \quad \lambda^{(1)} \quad \lambda^{(2)}\,|,$$

en convenant de n'écrire que la première ligne d'un déterminant tel que

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda^{(1)} & \lambda^{(2)} \\ \mu & \mu^{(1)} & \mu^{(2)} \\ \nu & \nu^{(1)} & \nu^{(2)} \end{vmatrix}.$$

D'autre part, d'après le Chapitre précédent, on a

$$g_1 = \tau_1 - \frac{\tau_1^3}{6r^3} + \frac{r'}{4r^4}\tau_1^4 + \ldots, \qquad g_2 = \tau_2 - \frac{\tau_2^3}{6r^3} + \frac{r'}{4r^4}\tau_2^4 + \ldots,$$

$$g = \tau - \frac{\tau^3}{6r^3} + \frac{r'}{4r^4}\tau^3(\tau_1 + \tau_2) + \ldots,$$

et après quelques réductions, on obtient

$$A = gX - g_2 X_1 + g_1 X_2 = \frac{1}{2}\tau\tau_1\tau_2\left[X^{(2)} + \frac{X}{r^3} + (\tau_1 + \tau_2)\left(\frac{X^{(1)}}{3r^3} - r'\frac{X}{r^4}\right) + \ldots\right],$$

et des expressions analogues pour B et C.

On voit encore que l'on a

$$D = |A \quad \lambda_1 \quad \lambda_2| = \tau\left|A \quad \lambda - \frac{\lambda^{(2)}}{2}\tau_1\tau_2 \quad \lambda^{(1)}\right|,$$

et par suite l'équation (11) devient

$$(a) \qquad \rho\,|\lambda \quad \lambda^{(1)} \quad \lambda^{(2)}| = \left|\lambda \quad \lambda^{(1)} \quad X^{(2)} + \frac{X}{r^3}\right|,$$

en ne négligeant que des termes généralement du premier ordre, mais qui deviennent du second ordre dans le cas spécial.

Avant d'examiner de plus près cette équation, achevons la solution, et pour cela, faisons encore

$$\rho_1 = \rho + \rho^{(1)}\tau_1 - \frac{\rho^{(2)}}{2}\tau_1\tau_2, \qquad \rho_2 = \rho + \rho^{(1)}\tau_2 - \frac{\rho^{(2)}}{2}\tau_1\tau_2.$$

On trouve

$$\lambda g\rho - \lambda_1 g_2\rho_1 + \lambda_2 g_1\rho_2 = \frac{1}{2}\tau\tau_1\tau_2\left[2\lambda^{(1)}\rho^{(1)} + \lambda\rho^{(2)} + \lambda^{(2)}\rho + \frac{\lambda\rho}{r^3} + \ldots\right],$$

en ne négligeant dans le crochet du second membre que des termes de l'ordre $\tau_1 + \tau_2$, ou du second ordre au moins.

Les équations (9) prennent donc la forme

$$2\lambda^{(1)}\rho^{(1)} + \lambda\rho^{(2)} + \lambda^{(2)}\rho + \frac{\lambda\rho}{r^3} = X^{(2)} + \frac{X}{r^3} + \ldots$$

. . . .

en n'écrivant que les termes principaux.

Résolvant ces trois équations aux inconnues ρ, $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$ par rapport à ρ, on retombe bien entendu sur l'équation (a) précédente; on peut ensuite en tirer $\rho^{(1)}$ de bien des façons, en supposant ρ et r connus, et toujours dans les mêmes conditions d'exactitude; par exemple

$$(b) \qquad 2\rho^{(1)}\,|\lambda \quad \lambda^{(1)} \quad \lambda^{(2)}| = \left|\lambda \quad X^{(2)} + \frac{X}{r^3} \quad \lambda^{(2)}\right|.$$

Enfin on a

$$(c) \qquad x = \lambda\rho - X, \qquad y = \mu\rho - Y, \qquad z = \nu\rho - Z,$$

et par les équations (7 *bis*) :

$$(d) \quad \begin{cases} x' = \lambda\rho^{(1)} + \lambda^{(1)}\rho - X^{(1)}, \quad y' = \mu\rho^{(1)} + \mu^{(1)}\rho - Y^{(1)}, \\ z' = \nu\rho^{(1)} + \nu^{(1)}\rho - Z^{(1)}. \end{cases}$$

Toutes les inconnues fondamentales sont ainsi déterminées, et toujours avec la même approximation du premier ordre en général, du second ordre dans le cas spécial : ce fait constant est au surplus intuitif, puisque, par raison de symétrie, les termes du premier ordre, dans les divers développements envisagés, ne peuvent dépendre que de la somme $\tau_1 + \tau_2$.

Revenons maintenant à l'équation (a) qui contient les deux inconnues ρ et r. En déterminant P et Q par les relations

$$P|\lambda \quad \lambda^{(1)} \quad \lambda^{(2)}| = |\lambda \quad \lambda^{(1)} \quad X^{(2)}|, \qquad Q|\lambda \quad \lambda^{(1)} \quad \lambda^{(2)}| = |\lambda \quad \lambda^{(1)} \quad X|,$$

on tombe sur le système étudie au Chapitre précédent (n° 31)

$$(e) \qquad \rho = P + \frac{Q}{r^3}, \qquad r^2 = \rho^2 + 2S\rho + R^2;$$

l'hypothèse $q = 0$ est vérifiée, et nous allons voir que l'égalité $Q = -PR^3$ est très près de l'être. En effet, la trajectoire du Soleil autour de la Terre est très sensiblement une orbite káplérienne, de sorte que les nombres $X^{(2)}$, $Y^{(2)}$, $Z^{(2)}$, qui diffèrent très peu des dérivées secondes des coordonnées du Soleil, sont en réalité très voisins des valeurs $-\frac{X}{R^3}$, $-\frac{Y}{R^3}$, $-\frac{Z}{R^3}$, d'après les équations différentielles du mouvement képlérien rappelées au n° 29 ; il en résulte bien que Q diffère très peu de $-PR^3$.

En d'autres termes, le système (e) admet d'une façon très approchée la solution $\rho = 0$, $r = R$; et il ne faut pas s'en étonner, puisque, si l'on suppose l'orbite de la Terre rigoureusement képlérienne, et les observations faites au centre de la Terre, il est clair que cette orbite est une solution parasite du problème proposé, correspondant à l'hypothèse $\rho = \rho_1 = \rho_2 = 0$.

Une fois le système (e) résolu comme il a été dit, la solution s'achève comme nous l'avons vu par l'emploi des formules (b), (c), (d).

Les considérations qui précèdent n'ont évidemment qu'une portée générale, et des difficultés pourront se présenter qui en altéreront la valeur. En se plaçant au point de vue purement analytique, ceci ne

peut arriver que si les deux solutions possibles des équations (e) sont confondues, ou bien si le déterminant $|\lambda\,\lambda^{(1)}\,\lambda^{(2)}|$ est nul. Mais il n'y a pas lieu de discuter ces cas en détail, d'autant plus que la façon dont nous avons représenté λ_1, λ_2 par exemple à l'aide de τ_1 et τ_2 est en partie arbitraire. Nous verrons plus loin comment les choses se présentent dans la réalité, et c'est le seul point important. Pour le moment, nous nous contenterons des remarques suivantes.

Si la solution des équations (e) est double, le calcul des inconnues peut se faire sans aucun changement, mais les développements supposés suivant les puissances de τ_1 et τ_2 sont impossibles : en effet, l'équation (a), écrite complètement, est de la forme

$$\rho - P - \frac{Q}{r^3} = K(\tau_1 + \tau_2) + \ldots,$$

en désignant par $K(\tau_1 + \tau_2)$ les termes d'abord négligés du premier ordre; et si ρ_0 est la racine double du premier membre égalé à zéro, la valeur exacte de ρ prend la forme $\rho_0 + K'\sqrt{\tau_1 + \tau_2} + \ldots$. L'approximation des résultats se trouve diminuée d'une façon correspondante, et il en est de même si, sans être exactement dans ce cas, on en est voisin.

Le déterminant $|\lambda\;\lambda^{(1)}\;\lambda^{(2)}|$ s'annule en même temps que $\Delta = |\lambda\;\lambda_1\;\lambda_2|$, c'est-à-dire si les trois directions observées appartiennent à un même plan. Dans ce cas, si ces directions ne sont pas confondues, on peut supposer les quantités $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1$ et λ_1 non nulles, et les équations (12) et (13) subsistant, l'équation (11) devient $D = |A\;\lambda_1\;\lambda_2| = 0$. Si cette équation ne se réduit pas à une identité, elle établit une relation entre g, g_1, g_2 qui permet, plus ou moins facilement, de résoudre le problème; si elle se réduit à une identité, c'est-à-dire si les déterminants $|X\;\lambda_1\;\lambda_2|$, $|X_1\;\lambda_1\;\lambda_2|$, $|X_2\;\lambda_1\;\lambda_2|$ sont nuls, le problème est indéterminé, l'indétermination étant du premier ordre; ces conditions expriment que les directions observées et celles du Soleil appartiennent toutes à un même plan.

Si les trois directions observées sont confondues, on peut supposer λ non nul; à la première des équations (9) que l'on peut alors conserver, on adjoint les deux relations

$$\lambda B - \mu A = 0, \qquad \lambda C - \nu A = 0,$$

et l'on achève comme ci-dessus; les directions du Soleil étant néces-

sairement distinctes, il ne peut y avoir qu'une indétermination du premier ordre, et cela dans le cas où ces directions appartiennent avec la direction unique de l'astre à un même plan.

En résumé, le problème n'est indéterminé que si l'orbite considérée et celle du Soleil sont dans un même plan, celui de l'écliptique, comme le montrent d'ailleurs les considérations géométriques les plus simples, puisqu'il s'agit de déterminer une section conique admettant le Soleil comme foyer, et rencontrant trois droites données en des points tels que les aires des secteurs curvilignes déterminés par le Soleil et ces trois points soient dans des rapports donnés avec la racine carrée du paramètre de l'orbite.

37. Nous pouvons maintenant aborder la résolution des équations générales établies précédemment.

Il faut tout d'abord calculer τ, τ_1, τ_2 par les formules (4), puis le déterminant Δ; on formera à cet effet les trois mineurs $\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1$, $\nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1$, $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1$, de sorte que

$$\Delta = \lambda(\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1) + \mu(\nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1) + \nu(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1).$$

Ici, comme dans tout ce qui suit, les calculs se font directement avec l'aide d'une table de multiplication ou d'une machine; ou bien par logarithmes, et la seule table auxiliaire nécessaire est alors celle des logarithmes d'addition et de soustraction.

On doit observer que les données étant supposées connues avec un certain degré d'exactitude (en faisant abstraction des erreurs d'observation), il y aura nécessairement, d'après les développements du paragraphe précédent, lorsque les intervalles de temps τ_1 et τ_2 sont petits, une certaine perte de précision dans le calcul des mineurs $\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1$, ..., et que cette perte s'accentuera beaucoup dans le calcul de Δ, de sorte que ce déterminant ne sera connu qu'avec un nombre de chiffres significatifs bien inférieur à celui des données.

Si le mineur $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1$ est relativement bien déterminé, on conservera l'équation (12) comme nous l'avons écrite; sinon, on lui substituera une équation analogue, dans laquelle le coefficient de $g_1\rho_2$ sera connu d'une façon plus précise : mais nous continuerons à raisonner sur cette équation même, les changements qui peuvent devenir nécessaires se faisant d'eux-mêmes. L'équation (13) aussi devra être changée si le coefficient λ_1 n'est pas bien déterminé.

Il faut encore calculer le déterminant D. Mettant les quantités g_1, g_2, g sous la forme indiquée au n° 29

$$g_1 = \tau_1 + \frac{\gamma_1}{r^3}, \qquad g_2 = \tau_2 + \frac{\gamma_2}{r^3}, \qquad g = \tau + \frac{\gamma}{r^3},$$

on a

$$A = X' + \frac{X''}{r^3}, \qquad B = Y' + \frac{Y''}{r^3}, \qquad C = Z' + \frac{Z''}{r^3},$$

en faisant

$$(16) \qquad \begin{cases} X' = \tau X - \tau_2 X_1 + \tau_1 X_2, & X'' = \gamma X - \gamma_2 X_1 + \gamma_1 X_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

de sorte que

$$D = D' + \frac{D''}{r^3},$$

avec

$$(17) \qquad D' = |\, X' \;\lambda_1\; \lambda_2 \,|, \qquad D'' = |\, X'' \;\lambda_1\; \lambda_2 \,|.$$

Ces déterminants sont faciles à calculer, en les développant comme Δ.

Les coefficients γ, γ_1, γ_2 n'étant pas connus, on les remplace par des valeurs approchées; en première approximation, on a

$$(18) \qquad \gamma_1 = -\frac{\tau_1^3}{6}, \qquad \gamma_2 = -\frac{\tau_2^3}{6}, \qquad \gamma = -\frac{\tau^3}{6};$$

et quand on connaît déjà une solution approchée du problème, on prendra les valeurs indiquées au Chapitre précédent.

Posant alors

$$(19) \qquad P = \frac{D'}{\tau\Delta}, \qquad Q = \frac{D''}{\tau\Delta}, \qquad q = -\frac{\gamma}{\tau},$$

l'équation (11) s'écrit

$$(20) \qquad \rho = P + \frac{Q + q\rho}{r^3},$$

et jointe à l'équation (14) forme le système étudié à la fin du Chapitre précédent. Le déterminant D' est, comme Δ, connu avec une précision notablement inférieure à celle des données, surtout parce qu'il en est ainsi de X', Y', Z'; D'' est très voisin de $-D'R^3$, comme nous l'avons expliqué ci-dessus; le coefficient q est petit en même temps que τ.

Si l'on regarde τ_1 et τ_2 comme des quantités petites du premier ordre, il résulte du paragraphe précédent que P est une quantité finie entièrement connue; Q est aussi une quantité finie, et q est du second ordre, mais ces deux coefficients ne sont connus que d'une façon approchée. Si pour calculer γ, γ_1, γ_2 on est parti d'éléments affectés d'une erreur d'ordre i, il est clair encore d'après l'observation faite à la fin du n° 30 que l'erreur de Q sera de l'ordre $i+1$, ou même $i+2$ dans le cas spécial; quant à l'erreur de q, elle est de l'ordre $i+3$ au moins; on voit par suite que, dans une première approximation, on pourrait négliger entièrement q, puisque alors cette quantité est d'un ordre égal ou supérieur à celui de l'erreur de Q. Ceci montre bien que l'équation (20) fournira une valeur de ρ plus exacte que celle qui résulte des éléments déjà supposés connus, et, en première approximation, une valeur approchée dont l'erreur sera du premier ou même du second ordre : on a donc institué une méthode véritablement convergente d'approximations successives, car la suite des calculs ne vient modifier en rien ce résultat. C'est d'ailleurs, plus exactement, la petitesse des rapports $\frac{\tau_1}{r^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\tau_2}{r^{\frac{3}{2}}}$, et non celle des intervalles τ_1, τ_2 eux-mêmes qui assure la convergence, ainsi que nous l'avons dit au Chapitre précédent. Et l'on voit encore que cette convergence sera plus ou moins rapide suivant les circonstances : en particulier, elle sera favorisée par la petitesse de $\tau_1+\tau_2$ relativement à τ_1 et τ_2, et aussi par celle de r'.

On résoudra l'équation (20), soit en s'aidant de la Table VII, soit en partant d'une valeur approchée de ρ. Une fois la valeur de ρ obtenue, le calcul s'achève sans difficulté aucune par les équations (12), (13), (8) et (7), en remplaçant d'abord r^3 par sa valeur correspondante dans les expressions de g, g_1, g_2, A, B, données ci-dessus, et en calculant le mineur $\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu$. Quant à f_1 et f_2, on les obtient en les mettant comme g_1 et g_2 sous la forme indiquée à la fin du n° 29

$$f_1 = 1 + \frac{\varphi_1}{r^3}, \qquad f_2 = 1 + \frac{\varphi_2}{r^3},$$

et en prenant pour φ_1, φ_2 les valeurs fournies par la solution approchée qui a déjà permis de calculer γ, γ_1, γ_2 d'après les formules (4)

du n° 29; en première approximation on a simplement

$$\varphi_1 = -\frac{\tau_1^2}{2}, \qquad \varphi_2 = -\frac{\tau_2^2}{2}. \tag{21}$$

Il serait évidemment illusoire de chercher à dépasser la précision que l'on peut réellement atteindre dans la résolution de l'équation (20); si les coefficients de cette équation sont connus avec quatre chiffres significatifs, on ne peut pas compter sur une exactitude plus grande pour la valeur de ρ. Toutefois, il ne faut pas en conclure que les calculs subséquents ne doivent pas être conduits avec une précision supérieure à celle que l'on peut obtenir dans la détermination de ρ. Si l'on veut représenter les observations, c'est-à-dire vérifier les équations fondamentales du problème avec une exactitude égale à celle des données, il faut, une fois que l'on a choisi une valeur de ρ vérifiant l'équation (20) autant que c'est possible, continuer les calculs avec une précision égale à celle des données, du moins quand on procède à la dernière approximation : et c'est pour cela que l'on détermine ρ_2 et ρ_1 en se servant des équations (12) et (13) qui, pour une valeur donnée de ρ, permettent d'obtenir les meilleures déterminations des autres inconnues. Pour bien se convaincre de ce fait essentiel, il suffit de se reporter à la discussion élémentaire d'un système d'équations linéaires : si l'on est dans le cas d'indétermination simple, les inconnues sont d'une façon générale toutes indéterminées, si l'on veut; mais, quand on a fixé la valeur de l'une d'elles, les autres en résultent d'une façon précise; et de même, si le déterminant des inconnues ne peut être calculé qu'avec une approximation relative inférieure à celle des coefficients, de sorte que les inconnues sont mal déterminées, il suffit, en général, de fixer l'une d'elles, dans les limites de son incertitude, pour obtenir les autres et vérifier les équations avec une exactitude égale à celle des coefficients. C'est ce que rendent encore évident les considérations géométriques les plus simples.

La même observation s'applique à la détermination de ρ_2 et ρ_1 par les équations (12) et (13), et finalement à celle de x', y', z' par les équations (7) ou (7 *bis*) : on y rencontre de nouvelles causes d'incertitude provenant pour ρ_2 et ρ_1 de la mauvaise détermination des coefficients de (12) et (13), A et B en particulier; et pour x', y', z' de

la petitesse relative des différences telles que $f_1 x_2 - f_2 x_1$. Toutefois cette nouvelle incertitude sera beaucoup moindre que celle qui affecte la détermination de ρ.

En résumé, il faut dire, pour être dans la vérité, que le problème proposé de la détermination d'une orbite, dans les conditions où nous nous sommes placés, admet une infinité de solutions, comprises entre certaines limites qui correspondent à l'incertitude de ρ principalement, mais aussi à celle de x', y', z', et que toutes ces solutions représentent les observations avec l'exactitude même qu'on leur suppose : cette incertitude, plus ou moins grande suivant les cas, est inévitable. On obtient finalement non pas les éléments de l'orbite cherchée, mais les éléments d'une orbite correspondant aux données, dans la mesure de leur exactitude supposée : et pour répondre complètement à la question posée, il conviendrait même d'indiquer dans quelles limites on peut faire varier la solution. Il est à peine utile d'ajouter que l'incertitude est encore augmentée, dans une plus ou moins large mesure, du fait que les observations sont affectées d'erreurs inévitables.

Quand on a obtenu les valeurs de x, y, z, x', y', z', on peut déterminer les éléments comme nous l'avons dit au Chapitre précédent, si du moins l'on présume que le calcul ne doit pas être recommencé. On peut aussi employer, si l'on veut, la méthode de Gauss exposée au n° 28, en laissant alors de côté la détermination de x', y', z' : mais les calculs sont moins simples que ceux du n° 27. En employant concurremment les deux méthodes, on s'assurera de l'exactitude du calcul, et de l'inutilité de procéder à une nouvelle approximation.

Quand on procède à la première approximation, en dehors de tout autre renseignement, il est inutile d'apporter une grande exactitude aux calculs qui dépendent de la détermination de ρ, puisqu'il est nécessaire de recommencer en corrigeant d'abord les dates d'observation par les formules (3); et quand même ces corrections seraient sujettes à de légères rectifications après une nouvelle approximation, on pourra regarder les valeurs corrigées des intervalles de temps τ, τ_1, τ_2, comme exactes, puisque, d'après le paragraphe précédent, les différences $\rho_1 - \rho$, $\rho_2 - \rho$ se trouvent connues avec une approximation du second ordre par rapport à τ_1, τ_2, ou même du troisième ordre quand les observations sont sensiblement équidistantes, ainsi qu'il arrive d'habitude.

Quand on devra procéder à une nouvelle approximation en recommençant le calcul, on se servira pour obtenir les nouvelles valeurs de γ, γ_1, γ_2, φ_1, φ_2 des résultats de l'approximation précédente, et l'on voit, d'après le Chapitre précédent, qu'il suffira de déterminer, outre r, r_1, r_2, les deux éléments a et p, pour lesquels on a

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - (x'^2 + y'^2 + z'^2), \qquad p = r^2(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (xx' + yy' + zz')^2.$$

Si l'on retrouve, à des différences négligeables près, les valeurs de g, g_1, g_2, f_1, f_2 précédemment employées, c'est qu'il n'y a pas lieu de recommencer le calcul, et l'on peut procéder à la détermination définitive des éléments.

L'incertitude générale de la solution sera d'autant plus grande que les déterminants D et D' seront simultanément plus mal déterminés; et il pourra se présenter encore une nouvelle incertitude relative à certains éléments, suivant les cas, comme nous l'avons vu en traitant de la détermination générale des éléments.

38. Un exemple fera bien comprendre l'application de la méthode précédente, et mettra en évidence les différents points importants que nous avons signalés.

Les données sont empruntées à J.-C. Watson (*Theoretical astronomy*, p. 266). La planète observée est Eurynome (79); en temps moyen de Washington, les dates sont

$$\begin{aligned} t' &= 1863 \text{ sept. } 21{,}42570, \\ t'_1 &= \quad » \quad » \quad 14{,}68079, \\ t'_2 &= \quad » \quad » \quad 28{,}38625. \end{aligned}$$

Les coordonnées sont rapportées à l'écliptique et à l'équinoxe moyens de 1863,0, et, après les corrections convenables, on a

$$\begin{aligned} \alpha &= 16^\circ.40'.25'',19, & \delta &= 2^\circ.52'.27'',62, \\ \alpha_1 &= 17.46.28,17, & \delta_1 &= 3.\ 8.43,51, \\ \alpha_2 &= 15.15.44,03, & \delta_2 &= 2.32.42,98. \end{aligned}$$

Pour le Soleil, les latitudes sont nulles, et l'on a

$$\odot = 178^{\circ}.35'.48'',74, \qquad R = [0,0011656],$$
$$\odot_1 = 173.\ 0.32,23, \qquad R_1 = [0,0021056],$$
$$\odot_2 = 185.25.36,90, \qquad R_2 = [0,0002378],$$

en désignant par $\odot$ la longitude, par R le rayon vecteur.

En outre,

$$k = [\bar{2},2355814],$$

et l'on a pour l'équation de la lumière, d'après Watson,

$$\varkappa = [\bar{3},76052].$$

La précision des données est évidemment illusoire : nous l'accepterons cependant pour développer les calculs.

On a d'abord, en représentant toujours un nombre par le logarithme de sa valeur absolue placé entre crochets, et suivi du signe — quand ce nombre est négatif :

$$X = [0,0010354-], \qquad X_1 = [\bar{1},9978679-], \qquad X_2 = [\bar{1},9982867-],$$
$$Y = [\bar{2},3900968\ ], \qquad Y_2 = [\bar{1},1451778\ ], \qquad Y_2 = [\bar{2},9760188-],$$
$$Z = 0, \qquad Z_1 = 0, \qquad Z_2 = 0;$$

$$\lambda = [\bar{1},9807981], \qquad \lambda_1 = [\bar{1},9871032], \qquad \lambda_2 = [\bar{1},9839776],$$
$$\mu = [\bar{1},4572143], \qquad \mu_1 = [\bar{1},4840313], \qquad \mu_2 = [\bar{1},4199185],$$
$$\nu = [\bar{2},7002332], \qquad \nu_1 = [\bar{2},7393377], \qquad \nu_2 = [\bar{2},6474688];$$

$$\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1 = [\bar{4},9510262-], \qquad \nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1 = [\bar{2},0276626],$$
$$\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = [\bar{2},6407195-], \qquad \lambda\mu_1 - \mu\lambda_1 = [\bar{2},2823699].$$

Il vient alors

$$\Delta = 0,000006768,$$

sans qu'il soit possible d'affirmer l'exactitude du dernier chiffre. En conservant, pour éviter l'accumulation des erreurs dues à l'emploi des tables, un chiffre de plus qu'il ne serait réellement nécessaire, on a donc

$$\Delta = [\bar{6},83046],$$

mais en réalité la précision que l'on peut obtenir est au plus celle de quatre chiffres significatifs.

D'autre part, pour la première approximation, on a

$$\tau = [\bar{1},3724750], \quad \tau_1 = [\bar{1},0645576-], \quad \tau_2 = [\bar{1},0782250],$$

d'où, avec l'exactitude suffisante ici :

$$\gamma = [\bar{3},33927-], \quad \gamma_1 = [\bar{4},41552], \quad \gamma_2 = [\bar{4},45652-],$$
$$\varphi_1 = [\bar{3},8281-], \quad \varphi_2 = [\bar{3},8554-];$$

puis

$$X' = [\bar{3},205728-], \quad Y' = [\bar{5},61813\ ], \quad Z' = 0,$$
$$X'' = [\bar{3},21625\ ], \quad Y'' = [\bar{5},58312-], \quad Z'' = 0,$$
$$D' = [\bar{6},27347], \quad D'' = [\bar{6},27369-],$$
$$P = [0,07054], \quad Q = [0,07076-], \quad q = [\bar{3},9668];$$

de plus,

$$R^2 = [0,00233], \quad S = [\bar{1},97863].$$

La Table VII montre alors que l'équation (20) a une seule racine positive voisine de 1,0, et l'on trouve facilement ensuite

$$\rho = [0,01387], \quad r = [0,30303].$$

Poursuivant cette première approximation avec cinq décimales, on a successivement

$$g = [\bar{1},37198], \quad g_1 = [\bar{1},06444-], \quad g_2 = [\bar{1},07810],$$
$$f_1 = [\bar{1},99964], \quad f_2 = [\bar{1},99962],$$
$$A = [\bar{3},14709-], \quad B = [\bar{5},56569], \quad C = 0;$$
$$\rho_1 = [0,02711], \quad \rho_2 = [0,00419];$$

et l'on peut vérifier la relation

$$\nu g \rho - \nu_1 g_2 \rho_1 + \nu_2 g_1 \rho_2 = C,$$

qui n'a pas été employée pour le calcul de ρ_1 et ρ_2.

On a ensuite

$$x = [0,29890], \quad x_1 = [0,30259], \quad x_2 = [0,29429], \quad x' = [\bar{1},2063\ -],$$
$$y = [\bar{1},43345], \quad y_1 = [\bar{1},26658], \quad y_2 = [\bar{1},55649], \quad y' = [\bar{1},87173\ ],$$
$$z = [\bar{2},71410], \quad z_1 = [\bar{2},76645], \quad z_2 = [\bar{2},65166], \quad z' = [\bar{2},76001-];$$
$$r = [0,30304], \quad r_1 = [0,30460], \quad r_2 = [0,30154],$$

et l'on peut constater que les équations (5) sont vérifiées.

On en déduit

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = [\bar{1},76575], \quad xx' + yy' + zz' = [\bar{1},0831-],$$

et

$$a = [0,38481], \quad p = [0,36912].$$

Les dates corrigées sont alors

$$t = 21,41975, \quad t_1 = 14,67466, \quad t_2 = 28,38043,$$

et pour procéder à la seconde approximation, on a d'abord

$$\tau = [\bar{1},3724848], \quad \tau_1 = [\bar{1},0645692-], \quad \tau_2 = [\bar{1},0782331].$$

Par les formules du n° 29, il vient, en partant des valeurs de g, g_1, g_2 déterminées ci-dessus, et que l'on constate n'avoir pas besoin de corrections pour atteindre le but actuellement poursuivi :

$$\sin\frac{v_2 - v_1}{2} = [\bar{2},650], \quad \sin\frac{v_1 - v}{2} = [\bar{2},340-], \quad \sin\frac{v_2 - v}{2} = [\bar{2},357],$$

$$\sin\frac{u_2 - u_1}{2} = [\bar{2},576], \quad \sin\frac{u_1 - u}{2} = [\bar{2},267-], \quad \sin\frac{u_2 - u}{2} = [\bar{2},282];$$

$$\gamma = [\bar{3},33917-], \quad \gamma_1 = [\bar{4},41322], \quad \gamma_2 = [\bar{4},45879-],$$

$$\varphi_1 = [\bar{3},82653-], \quad \varphi_2 = [\bar{3},85689-].$$

Il en résulte

$$X' = [\bar{3},205738-], \quad Y' = [\bar{5},61931\ \ ], \quad Z' = 0,$$

$$X'' = [\bar{3},21609\ \ ], \quad Y'' = [\bar{5},57911-], \quad Z'' = 0,$$

$$D' = [\bar{6},27376], \quad D'' = [\bar{6},27270-],$$

$$P = [0,07082], \quad Q = [0,06976-], \quad q = [\bar{3},9667];$$

d'où

$$\rho = [0,01445], \quad r = [0,30333].$$

Poursuivant le calcul avec l'approximation qui correspond à celle des données, en partant de la valeur

$$\rho = [0,0144500]$$

arbitraire dans une large mesure, car on ne peut même pas répondre de la quatrième décimale, on aura

$$g = [\bar{1},3719896], \quad g_1 = [\bar{1},0644499-], \quad g_2 = [\bar{1},0781047],$$

$$f_1 = [\bar{1},9996415], \quad f_2 = [\bar{1},9996155],$$

$$A = [\bar{3},147251-], \quad B = [\bar{5},56765], \quad C = 0,$$

$$\rho_1 = [0,0277154], \quad \rho_2 = [0,0047383],$$

et

$x = [0,2991814]$, $x_1 = [0,3028914]$, $x_2 = [0,2945577]$, $x' = [\bar{1},208066 -]$,
$y = [\bar{1},4340920]$, $y_1 = [\bar{1},2676497]$, $y_2 = [\bar{1},5568934]$, $y' = [\bar{1},8714276\ ]$,
$z = [\bar{2},7146832]$, $z_1 = [\bar{2},7670531]$, $z_2 = [\bar{2},6522071]$, $z' = [\bar{2},7607662 -]$,
$r = [0,3033304]$,

d'où, par le n° **27**, les éléments suivants, le moyen mouvement n étant exprimé en secondes, et l'anomalie moyenne M se rapportant à l'époque t :

$$a = [0,3849351],\quad \Im = 206^\circ.59'.45'',75,\quad e = [\bar{1},275272],$$
$$p = [0,3692257],\quad i = 4.28.42,29,\quad M = -20^\circ 8' 52'',24,$$
$$n = [2,9726039],\quad \omega = 190.20.33,99.$$

La méthode du n° **28** conduit aux mêmes résultats, à des différences insignifiantes près, inévitables d'ailleurs.

En partant de ces valeurs, directement, on trouve

$$v = -29^\circ.37'.28'',00,\quad r = [0,3033305],$$
$$v_1 = -32.\ 7.51,67,\quad r_1 = [0,3049123],$$
$$v_2 = -27.\ 1.\ 9,20,\quad r_2 = [0,3018161],$$

et

$$\alpha = 16^\circ.40'.25'',21,\quad \delta = 2^\circ.52'.27'',62,\quad \rho = [0,0144500],$$
$$\alpha_1 = 17.46.28,18,\quad \delta_1 = 3.\ 8.43,50,\quad \rho_1 = [0,0277155],$$
$$\alpha_2 = 15.15.44,08,\quad \delta_2 = 2.32.42,97,\quad \rho_2 = [0,0047386],$$

de sorte que les données sont représentées aussi parfaitement que possible. Les éléments sont cependant fort incertains, et cela de plusieurs façons.

En partant par exemple de la valeur

$$\rho = [0,0143500],$$

on aurait

$$a = [0,3849029],\quad \Im = 206^\circ.59'.58'',29,\quad e = [\bar{1},275143],$$
$$p = [0,3692031],\quad i = 4.28.36,83,\quad M = -20^\circ 5' 48'',41,$$
$$n = [2,9726523],\quad \omega = 190.15.42,06,$$

et l'on en déduirait

$$\alpha = 16^\circ.40'.25'',21,\quad \delta = 2^\circ.52'.27'',62,$$
$$\alpha_1 = 17.46.28,18,\quad \delta_1 = 3.\ 8.43,52,$$
$$\alpha_2 = 15.15.44,08,\quad \delta_2 = 2.32.42,99.$$

Ce résultat suffit pour montrer que l'on peut faire varier les éléments dans une très large mesure sans cesser de représenter les observations, surtout si l'on tient compte de leur précision réelle qui n'atteint certainement pas une seconde d'arc.

89. Quand l'astre observé est une comète, il arrive le plus souvent que la première approximation donne pour le demi-grand axe a une valeur très grande. Si l'on juge alors, d'après les limites d'incertitude indiquées par la solution, qu'il est possible de déterminer une orbite rigoureusement parabolique représentant les observations avec une exactitude suffisante, il y aura avantage à faire effectivement cette détermination.

On peut à cet effet employer la méthode générale suivante, qui s'applique encore si l'incertitude de la solution primitive est telle qu'on ne puisse même pas déterminer une orbite approchée, ou bien si l'on veut *a priori* calculer une orbite parabolique, ainsi qu'on le fait d'habitude quand il s'agit d'une première détermination.

Reprenons les équations (9) écrites sous la forme

$$U = 0, \qquad V = 0, \qquad W = 0,$$

et en désignant par X_0, Y_0, Z_0, trois quantités arbitrairement choisies, résolvons par rapport à ρ_1 et ρ_2 les deux équations qui résultent des précédentes par la combinaison

$$\frac{U}{X_0} = \frac{V}{Y_0} = \frac{W}{Z_0}.$$

On obtient ainsi, en mettant pour A, B, C, leurs valeurs $X' + \frac{X''}{r^3}$, ..., indiquées précédemment,

$$g_1\rho_1 = a_1 g\rho + b_1 + \frac{c_1}{r^3}, \qquad g_1\rho_2 = a_2 g\rho + b_2 + \frac{c_2}{r^3},$$

avec

$$a_1|X_0\ \lambda_1\ \lambda_2| = |X_0\ \lambda\ \lambda_2|, \qquad a_2|X_0\ \lambda_1\ \lambda_2| = |X_0\ \lambda\ \lambda_1|,$$
$$b_1|X_0\ \lambda_1\ \lambda_2| = |X_0\ \lambda_2\ X'|, \qquad b_2|X_0\ \lambda_1\ \lambda_2| = |X_0\ \lambda_1\ X'|,$$
$$c_1|X_0\ \lambda_1\ \lambda_2| = |X_0\ \lambda_2\ X''|, \qquad c_2|X_0\ \lambda_1\ \lambda_2| = |X_0\ \lambda_1\ X''|.$$

Portant ces valeurs dans les équations (7 *bis*), il vient

$$x' = \xi\rho + \xi' + \frac{\xi''}{r^3}, \qquad y' = \eta\rho + \eta' + \frac{\eta''}{r^3}, \qquad z' = \zeta\rho + \zeta' + \frac{\zeta''}{r^3},$$

en posant

$$\xi = \frac{f_1}{g_1}\lambda_2 a_2 - \frac{f_2}{g_2}\lambda_1 a_1,$$

$$\xi' = \frac{1}{g}\left(f_2 X_1 - f_1 X_2 + \frac{f_1}{g_1}\lambda_2 b_2 - \frac{f_2}{g_2}\lambda_1 b_1\right),$$

$$\xi'' = \frac{1}{g}\left(\frac{f_1}{g_1}\lambda_2 c_2 - \frac{f_2}{g_2}\lambda_1 c_1\right),$$

et déterminant de même η, η', η'', ζ, ζ', ζ''.

De plus, on a toujours

$$x = \lambda\rho - X, \qquad y = \mu\rho - Y, \qquad z = \nu\rho - Z,$$
$$r^2 = \rho^2 + 2S\rho + R^2.$$

L'orbite qui correspond aux valeurs x, y, z, x', y', z' résultant du choix d'une valeur de ρ sera une parabole sous la condition

$$f(\rho) = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{1}{r} = 0.$$

Il faut donc déterminer ρ par la résolution de cette équation, ce qui n'offre aucune difficulté, surtout si l'on connaît déjà une valeur approchée de ρ fournie par l'équation (20) dans un premier calcul. Dans tous les cas, on pourra appliquer la méthode d'approximation de Newton, en calculant la dérivée $f'(\rho)$ par la formule

$$f'(\rho) = x'\xi + y'\eta + z'\zeta + \frac{\rho + S}{r^3}\left(1 - 3\frac{x'\xi'' + y'\eta'' + z'\zeta''}{r^2}\right).$$

Connaissant ρ, on a immédiatement x, y, z, x', y', z' et, par suite, les éléments de l'orbite; on a aussi ρ_1, ρ_2, et enfin x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 par les formules (5), qui déterminent les points de l'orbite correspondant aux époques t_1 et t_2.

Examinons de plus près les coefficients des expressions de ρ_1, ρ_2, x', y', z', en fonction linéaire de ρ et de $\frac{1}{r^3}$; et pour cela, supposons que τ_1 et τ_2 soient de petites quantités du premier ordre. On peut développer la solution et les données elles-mêmes suivant les puissances de ces quantités, par exemple prendre pour λ_1 et λ_2 des développements de la forme

$$\lambda_1 = \lambda + \lambda'\tau_1 + \lambda''\tau_1^2 + \ldots, \qquad \lambda_2 = \lambda + \lambda'\tau_2 + \lambda''\tau_2^2 + \ldots.$$

On voit alors que a_1 et a_2 sont des quantités connues, et l'on peut

leur donner des développements tels que

$$a_1 = \frac{\tau_2}{\tau}(1 + a'_1\tau_1 + a'_2\tau_2 + \ldots), \qquad a_2 = \frac{\tau_1}{\tau}(1 + a'_2\tau_1 + a'_1\tau_2 + \ldots),$$

puisqu'elles ne font que s'échanger au signe près quand on échange les indices 1 et 2, et que leurs parties principales sont en évidence.

De même b_1 et b_2 sont des quantités connues et, d'après les développements du n° 36, de la forme

$$b_1 = \tau_1\tau_2(b_0 + b'_1\tau_1 + b'_2\tau_2 + \ldots), \qquad b_2 = \tau_1\tau_2(b_0 + b'_2\tau_1 + b'_1\tau_2 + \ldots).$$

Quant à c_1 et c_2, ce sont des quantités qui ne sont connues qu'avec une certaine approximation, développables d'ailleurs sous la même forme que b_1 et b_2.

En poursuivant ce raisonnement et se rappelant les expressions de g, g_1, g_2, f_1, f_2, on voit finalement que les coefficients ξ, ξ', ξ'' sont tous des quantités finies, développables suivant les puissances de τ_1 et τ_2; de plus, si, comme au n° 30, on part d'éléments connus avec une erreur d'ordre i et que l'on emploie les valeurs de g, g_1, g_2, f_1, f_2 qui en résultent, en même temps que celles de γ, γ_1, γ_2 nécessaires au calcul de X'', Y'', Z'', l'erreur de ξ, ξ', ξ'', ... sera de l'ordre $i+1$, et même, par simple raison de symétrie, de l'ordre $i+2$ dans le cas spécial où la somme $\tau_1 + \tau_2$ peut être regardée comme du second ordre. Par suite, les conditions requises pour instituer une méthode convergente d'approximations successives sont bien vérifiées, comme nous l'avions supposé implicitement. Si l'on fait une première approximation en dehors de tout autre renseignement, on prendra simplement

$$g = \tau, \quad g_1 = \tau_1, \quad g_2 = \tau_2, \quad f_1 = f_2 = 1, \quad \gamma = -\frac{\tau^3}{6}, \quad \gamma_1 = -\frac{\tau_1^3}{6}, \quad \gamma_2 = -\frac{\tau_2^3}{6}.$$

Supposons les approximations successives menées à bonne fin, et comparons aux observations les positions que l'on déduit de l'orbite calculée. Il est clair que l'observation moyenne est exactement représentée, tandis qu'il n'en est pas de même des deux autres, si du moins la solution parabolique ne correspond pas exactement aux données. Si l'on détermine x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 par les formules (5), ainsi que nous l'avons déjà dit, et que l'on fasse

$$\begin{aligned} P_1 &= x_1 + X_1 - \lambda_1\rho_1, & P_2 &= x_2 + X_2 - \lambda_2\rho_2, \\ Q_1 &= y_1 + Y_1 - \mu_1\rho_1, & Q_2 &= y_2 + Y_2 - \mu_2\rho_2, \\ R_1 &= z_1 + Z_1 - \nu_1\rho_1, & R_2 &= z_2 + Z_2 - \nu_2\rho_2, \end{aligned}$$

il résulte manifestement de la marche suivie que ces quantités ne seront pas nulles en général, mais que l'on aura seulement

$$\frac{g_2 P_1 - g_1 P_2}{X_0} = \frac{g_2 Q_1 - g_1 Q_2}{Y_0} = \frac{g_2 R_1 - g_1 R_2}{Z_0},$$

avec

$$f_2 P_1 - f_1 P_2 = f_2 Q_1 - f_1 Q_2 = f_2 R_1 - f_1 R_2 = 0;$$

c'est-à-dire, en désignant par σ un facteur de proportionnalité,

$$\begin{aligned} P_1 &= f_1 \sigma X_0, & P_2 &= f_2 \sigma X_0, \\ Q_1 &= f_1 \sigma Y_0, & Q_2 &= f_2 \sigma Y_0, \\ R_1 &= f_1 \sigma Z_0, & R_2 &= f_2 \sigma Z_0. \end{aligned}$$

En d'autres termes, si l'on revient aux quinze équations fondamentales du problème (2) et (5), les six dernières équations (2) ne sont pas vérifiées, et l'on voit par ce qui précède, comment elles ne le sont pas.

Si maintenant nous appelons λ'_1, μ'_1, ν'_1, ρ'_1 et λ'_2, μ'_2, ν'_2, ρ'_2 les quantités analogues à λ_1, μ_1, ν_1, ρ_1, ... qui résultent de l'orbite calculée, et qui par suite vérifient les relations

$$x_1 + X_1 - \lambda'_1 \rho'_1 = 0, \qquad \ldots,$$

on aura donc

$$\begin{aligned} \lambda'_1 \rho'_1 - \lambda_1 \rho_1 &= f_1 \sigma X_0, & \lambda'_2 \rho'_2 - \lambda_2 \rho_2 &= f_2 \sigma X_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$

Ces relations donnent

$$|\lambda'_1 \ \lambda_1 \ X_0| = 0, \qquad |\lambda'_2 \ \lambda_2 \ X_0| = 0,$$
$$\frac{\rho'_1}{f_1} |\lambda'_1 \ \lambda_1 \ \lambda_2| = \frac{\rho'_2}{f_2} |\lambda'_2 \ \lambda_1 \ \lambda_2|,$$

ce qui montre que : 1° la direction calculée (λ'_1, μ'_1, ν'_1) et la direction observée (λ_1, μ_1, ν_1) sont dans un même plan avec la direction (X_0, Y_0, Z_0); 2° de même, les directions (λ'_2, μ'_2, ν'_2), (λ_2, μ_2, ν_2), (X_0, Y_0, Z_0) sont dans un même plan; 3° les sinus des angles que font les directions calculées (λ'_1, μ'_1, ν'_1), (λ'_2, μ'_2, ν'_2), avec le plan des deux directions observées (λ_1, μ_1, ν_1), (λ_2, μ_2, ν_2), sont proportionnels à $\frac{f_1}{\rho'_1}$ et $\frac{f_2}{\rho'_2}$, c'est-à-dire que ces angles sont sensiblement égaux; ils sont d'ailleurs petits en même temps que σ.

Le calcul se simplifie notablement si l'on choisit X_0, Y_0, Z_0 d'une

façon particulière. Prenons en effet ces quantités proportionnelles à A, B, C; il reste simplement

$$g_2\rho_1 = a_1 g\rho, \qquad g_1\rho_2 = a_2 g\rho,$$
$$x' = \xi\rho + \xi', \qquad \ldots,$$
$$\xi = \frac{f_1}{g_1}\lambda_2 a_2 - \frac{f_2}{g_2}\lambda_1 a_1, \qquad \xi' = \frac{1}{g}(f_2 X_1 - f_1 X_2),$$

et en faisant

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = G, \qquad \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = H, \qquad \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = K,$$

l'équation en ρ devient

$$f(\rho) = \frac{1}{2}(G\rho^2 + 2H\rho + K) - \frac{1}{r} = 0,$$

et rendue entière serait du sixième degré; sous cette forme, sa résolution n'offre aucune difficulté: l'expression de la dérivée de $f(\rho)$ est

$$f'(\rho) = G\rho + H + \frac{\rho + S}{r^3}.$$

A la vérité, on ne connaît pas A, B, C; mais il est clair qu'il suffit de se servir de valeurs approchées de ces quantités pour obtenir une méthode légitime d'approximations successives sous la forme précédente.

Si l'on fait une première approximation en dehors de tout autre renseignement, les intervalles de temps τ_1, τ_2 étant suffisamment petits, on pourra prendre $X_0 = X$, $Y_0 = Y$, $Z_0 = Z$, puisque nous savons que l'on a d'une façon très approchée

$$A = \frac{1}{2}\tau\tau_1\tau_2 X\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right), \qquad \ldots;$$

mais dès que l'on connaîtra des valeurs plus exactes de g, g_1, g_2, on se servira des formules générales

$$A = gX - g_2 X_1 + g_1 X_2, \qquad \ldots.$$

Bien entendu, ce procédé si simple cesse d'être utilisable si l'incertitude que l'on rencontre dans le calcul du déterminant $|X\lambda_1\lambda_2|$ devient trop considérable; et d'une façon générale, les réflexions faites au n° 37 sur l'incertitude de la solution trouvent encore leur

place, quoique dans une moindre mesure, quand il s'agit de déterminer une orbite parabolique.

La projection sur la sphère céleste de la trajectoire géocentrique de la comète calculée par la méthode précédente passe par la position moyenne observée, et par deux points voisins des positions extrêmes, soumis aux conditions trouvées ci-dessus. Il peut sembler préférable que la trajectoire calculée passe par les deux positions extrêmes observées et par un point voisin de la position moyenne. Pour obtenir ce résultat, il suffit de modifier ce qui précède de la façon suivante. Au lieu de déterminer x, y, z par les premières formules (8), servons-nous des formules (6) et des dernières formules (8), de façon à avoir

$$gx = g_2(\lambda_1\rho_1 - X_1) - g_1(\lambda_2\rho_2 - X_2), \qquad \dots,$$

c'est-à-dire

$$x = \alpha\rho + \alpha', \qquad y = \beta\rho + \beta', \qquad z = \gamma\rho + \gamma',$$

avec

$$\alpha = \lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2, \qquad \dots,$$

$$\alpha' = \frac{1}{g}\left[g_1 X_2 - g_2 X_1 + \lambda_1\left(b_1 + \frac{c_1}{r^3}\right) - \lambda_2\left(b_2 + \frac{c_2}{r^3}\right)\right], \qquad \dots;$$

on peut faire ainsi, parce que la quantité $\lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2$ est du troisième ordre par rapport à τ_1 et τ_2, de sorte qu'il suffit d'une valeur approchée de r pour calculer α'.

On a alors

$$r^2 = D\rho^2 + 2E\rho + F,$$

avec

$$D = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \qquad E = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma', \qquad F = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2,$$

et l'on continue de la même façon que ci-dessus, en mettant cette nouvelle expression de r dans l'équation $f(\rho) = 0$.

L'orbite est déterminée par les éléments

$$x = \alpha\rho + \alpha', \qquad \dots, \qquad x' = \xi\rho + \xi' + \frac{\xi''}{r^3}, \qquad \dots.$$

Les positions extrêmes calculées et observées coïncident, d'après la marche suivie; mais il n'en est pas de même des positions moyennes : si l'on fait

$$P = x + X - \lambda\rho, \qquad Q = y + Y - \mu\rho, \qquad R = z + Z - \nu\rho,$$

on a seulement

$$\frac{P}{X_0} = \frac{Q}{Y_0} = \frac{R}{Z_0},$$

ce qui montre que la direction moyenne calculée et la direction moyenne observée sont dans un même plan avec la direction (X_0, Y_0, Z_0).

Si l'on simplifie le calcul comme précédemment en choisissant les quantités X_0, Y_0, Z_0 proportionnelles à A, B, C, il reste

$$\alpha = \lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2, \qquad \alpha' = \frac{1}{g}(g_1 X_2 - g_2 X_1), \qquad \ldots .$$

Un exemple va nous montrer l'application de ce qui précède. Les données sont encore empruntées à l'Ouvrage de J.-C. Watson (p. 199). La comète observée est la cinquième de 1863; en temps moyen de Washington, les dates corrigées de l'aberration sont

$$\begin{aligned} t &= 1864 \text{ Janvier } 13{,}27682, \\ t_1 &= \quad » \quad » \quad 10{,}30837, \\ t_2 &= \quad » \quad » \quad 10{,}29299. \end{aligned}$$

Les coordonnées sont rapportées à l'écliptique et à l'équinoxe moyens de 1864,0, et après les corrections convenables, on a

$$\begin{aligned} \alpha &= 302^\circ.57'.34'',4, & \delta &= 57^\circ.39'.35'',9, \\ \alpha_1 &= 297.52.51,1, & \delta_1 &= 55.46.58,4, \\ \alpha_2 &= 310.31.35,0, & \delta_2 &= 59.38.18,7. \end{aligned}$$

Pour le Soleil, les latitudes sont nulles, et avec les mêmes notations que précédemment, on a

$$\begin{aligned} \odot &= 293^\circ.\ 7'.57'',1, & R &= [\bar{1},992830], \\ \odot_1 &= 290.\ 6.24,7, & R_1 &= [\bar{1},992763], \\ \odot_2 &= 296.12.15,7, & R_2 &= [\bar{1},992916]. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \tau &= [\bar{1},012618\ ], & \tau_1 &= [\bar{2},708111-], & \tau_2 &= [\bar{2},715037\ ]; \\ \lambda &= [\bar{1},463943\ ], & \lambda_1 &= [\bar{1},419899\ ], & \lambda_2 &= [\bar{1},516460\ ], \\ \mu &= [\bar{1},652097-], & \mu_1 &= [\bar{1},696406-], & \mu_2 &= [\bar{1},584556-], \\ \nu &= [\bar{1},926799\ ], & \nu_1 &= [\bar{1},917460\ ], & \nu_2 &= [\bar{1},935937\ ], \end{aligned}$$

et

$$X = [\bar{1},587067\ ], \quad X_1 = [\bar{1},529049\ ], \quad X_2 = [\bar{1},637920\ ],$$
$$Y = [\bar{1},956428-], \quad Y_1 = [\bar{1},965451-], \quad Y_2 = [\bar{1},945817-],$$
$$Z = 0, \quad Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0;$$

ce sont les données proprement dites du problème.

Appliquons d'abord la première méthode simplifiée; les quantités fixes nécessaires sont

$$\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1 = [\bar{1},046058-], \quad \nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1 = [\bar{2},650240\ ],$$
$$\mu\nu_2 - \mu_2\nu = [\bar{2},797151-], \quad \nu\lambda_2 - \nu_2\lambda = [\bar{2},421245\ ],$$
$$\mu\nu_1 - \mu_1\nu = [\bar{2},688426\ ], \quad \nu\lambda_1 - \nu_1\lambda = [\bar{2},266774-];$$
$$S = [\bar{1},714717-], \quad R^2 = [\bar{1},985660].$$

Pour la première approximation, on prend

$$g = \tau, \quad g_1 = \tau_1, \quad g_2 = \tau_2, \quad f_1 = f_2 = 1, \quad X_0 = X, \quad Y_0 = Y, \quad Z_0 = Z;$$

d'où

$$a_1 = [\bar{1},760860], \quad a_2 = [\bar{1},630036-],$$

$$\xi = [\bar{1},2511-], \quad \eta = [0,3643\ ], \quad \zeta = [0,2968-],$$
$$\xi' = [\bar{1},9711-], \quad \eta' = [\bar{1},5983-], \quad \zeta' = 0,$$
$$G = [0,9689\ ], \quad H = [\bar{1},8755-], \quad K = [0,0139],$$

et

$$\rho = [\bar{1},6728], \quad r = [\bar{1},9229].$$

On a ainsi une première orbite parabolique déterminée par

$$x = [\bar{1},3970-], \quad x' = [0,0084-],$$
$$y = [\bar{1},8408\ ], \quad y' = [\bar{1},8405\ ],$$
$$z = [\bar{1},5996\ ], \quad z' = [\bar{1},9696-].$$

Pour procéder à une seconde approximation nécessaire, mais définitive, nous avons d'abord

$$rr' = [\bar{1},5605], \quad V^2 = [0,3781], \quad p = [0,1882],$$

et par les formules

$$f_1 = 1 - \frac{\tau_1^2}{2r^3}, \quad \ldots, \quad g_1 = \tau_1 - \frac{\tau_1^3}{6r^3}, \quad \ldots,$$
$$r_1^2 = r^2 f_1^2 + 2rr' f_1 g_1 + V^2 g_1^2, \quad \ldots,$$

il vient

$$f_1 = f_2 = [\bar{1},9990], \quad g_1 = [\bar{2},7078-], \quad g_2 = [\bar{2},7147], \quad g = [\bar{1},0113],$$
$$r_1 = [\bar{1},9122], \quad r_2 = [\bar{1},9352];$$

de sorte que, par le n° 29, on a plus exactement

$$f_1 = [\bar{1},999010], \quad f_2 = [\bar{1},999030],$$
$$g = [\bar{1},011312], \quad g_1 = [\bar{2},707777-], \quad g_2 = [\bar{2},714718],$$

d'où

$$A = [\bar{5},525-], \quad B = [\bar{5},904], \quad C = 0.$$

Recommençant alors le calcul en prenant

$$X_0 = 1, \quad Y_0 = [0,379000-], \quad Z_0 = 0,$$

on a successivement

$$a_1 = [\bar{1},760971], \quad a_2 = [\bar{1},629894-],$$
$$\xi = [\bar{1},254504-], \quad \eta = [0,364155\ ], \quad \zeta = [0,297179-],$$
$$\xi' = [\bar{1},971377-], \quad \eta' = [\bar{1},599046-], \quad \zeta' = 0,$$
$$G = [0,969017\ ], \quad H = [\bar{1},875372-], \quad K = [0,014646\ ],$$
$$\rho = [\bar{1},672482], \quad r = [\bar{1},922867].$$

Les éléments de l'orbite parabolique cherchée sont donc finalement

$$x = [\bar{1},397105-], \quad x' = [0,008917-],$$
$$y = [\bar{1},840982\ ], \quad y' = [\bar{1},839344\ ],$$
$$z = [\bar{1},599281\ ], \quad z' = [\bar{1},969661-];$$

et l'on a de plus

$$\rho_1 = [\bar{1},730047], \quad \rho_2 = [\bar{1},605911].$$

Pour vérifier que l'hypothèse d'une orbite parabolique est justifiée, calculons x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 d'une part par les formules (5), et d'autre part par les formules (8); on a par les premières

$$x_1 = [\bar{1},294177-], \quad x_2 = [\bar{1},479841-],$$
$$y_1 = [\bar{1},817282\ ], \quad y_2 = [\bar{1},861932\ ],$$
$$z_1 = [\bar{1},647505\ ], \quad z_2 = [\bar{1},541846\ ],$$

et par les secondes

$$x_1 = [\bar{1},294172-], \quad x_2 = [\bar{1},479839-],$$
$$y_1 = [\bar{1},817278\ ], \quad y_2 = [\bar{1},861928\ ],$$
$$z_1 = [\bar{1},647507\ ], \quad z_2 = [\bar{1},541848\ ].$$

Ce résultat est entièrement satisfaisant, et l'on constate que les différences entre les deux valeurs d'une même coordonnée satisfont aux conditions indiquées ci-dessus, dans les limites de l'incertitude d'un calcul à six décimales.

Dirigeons maintenant le calcul de façon à représenter exactement les observations extrêmes. En raison de la plus grande simplicité des opérations, il y a tout avantage à faire la première approximation comme ci-dessus, les logarithmes de S et R^2 n'ayant plus besoin que de quatre décimales.

On aura ensuite, en n'écrivant que les nombres nouveaux :

$$\alpha = [\bar{1},464984\ ], \quad \beta = [\bar{1},653712-], \quad \gamma = [\bar{1},926800],$$
$$\alpha' = [\bar{1},587434-], \quad \beta' = [\bar{1},956803\ ], \quad \gamma' = 0,$$
$$D = [0,000830\ ], \quad E = [\bar{1},716581-], \quad F = [\bar{1},986407],$$
$$\rho = [\bar{1},672484], \quad r = [\bar{1},922864];$$
$$x = [\bar{1},397100-], \quad x' = [0,008917-],$$
$$y = [\bar{1},840978\ ], \quad y' = [\bar{1},839347\ ],$$
$$z = [\bar{1},599284\ ], \quad z' = [\bar{1},969663-].$$

Les équations telles que

$$x_1 = \lambda_1 \rho_1 - X_1 = f_1 x + g_1 x' \quad \ldots$$

sont vérifiées, et l'on a

$$\lambda\rho - X = [\bar{1},397104-],$$
$$\mu\rho - Y = [\bar{1},840981\ ],$$
$$\nu\rho - Z = [\bar{1},599283\ ].$$

40. Lorsque, dans le cas général, il devient pratiquement impossible de calculer ρ par l'équation (20), en raison de la trop mauvaise détermination des coefficients, il est nécessaire d'avoir recours à une quatrième observation, ainsi qu'on le voit immédiatement dans le cas limite où l'orbite de l'astre observé se trouve précisément dans le plan de l'écliptique.

Indiquons brièvement comment on peut diriger le calcul dans ces conditions exceptionnelles, assez rares en réalité.

Soit t'_1 la date d'une quatrième observation : nous conserverons toutes les notations précédentes pour les quantités qui dépendent des trois dates t, t_1, t_2, et nous marquerons d'un accent les quantités analogues qui dépendent de t, t'_1, t_2, de sorte que l'on aura par exemple

$$\tau'_1 = k(t'_1 - t), \qquad \tau' = \tau_2 - \tau'_1 = k(t_2 - t'_1),$$
$$x'_1 = \lambda'_1 \rho'_1 - X'_1 = f'_1 x + g'_1 x', \qquad \ldots,$$
$$g' = f'_1 g_2 - f_2 g'_1 ;$$

toutefois, afin d'éviter toute confusion, nous introduirons une légère modification dans les notations, en écrivant, au lieu de X' et X'', ...,

$$X^{(1)} = \tau X - \tau_2 X_1 + \tau_1 X_2, \qquad X^{(2)} = \gamma X - \gamma_2 X_1 + \gamma_1 X_2, \qquad \ldots,$$

et par suite

$$X'^{(1)} = \tau' X - \tau_2 X'_1 + \tau'_1 X_2, \qquad X'^{(2)} = \gamma' X - \gamma_2 X'_1 + \gamma'_1 X_2, \qquad \ldots.$$

Reprenons alors l'équation (12), qui s'écrit

$$\rho_2(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)\left(\tau_1 + \frac{\gamma_1}{r^3}\right)$$
$$= \rho(\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu)\left(\tau + \frac{\gamma}{r^3}\right) + \lambda_1\left(Y^{(1)} + \frac{Y^{(2)}}{r^3}\right) - \mu_1\left(X^{(1)} + \frac{X^{(2)}}{r^3}\right),$$

c'est-à-dire

$$\rho_2 = a\rho + b + \frac{c}{r^3} + \frac{d\rho}{r^3} + \frac{d_2\rho_2}{r^3},$$

sans qu'il soit nécessaire de détailler les valeurs évidentes des coefficients a, b, c, d, d_2; a et b sont exactement connus, tandis que c, d, d_2 ne le sont qu'avec une certaine approximation, celle de γ, γ_1, γ_2; si les intervalles de temps sont regardés comme de petites quantités du premier ordre, a est une quantité finie, b et c sont du premier ordre, d et d_2 sont du second ordre.

La combinaison des observations faites aux dates t, t'_1, t_2 donne une équation toute semblable

$$\rho_2 = a'\rho + b' + \frac{c'}{r^3} + \frac{d'\rho}{r^3} + \frac{d'_2\rho_2}{r^3};$$

en égalant les deux valeurs de ρ_2, on a une équation propre à déterminer ρ; elle est toujours du même type (20), sauf qu'il y figure un petit terme en $\frac{\rho_2}{r^3}$; mais ce terme peut être remplacé sans inconvé-

nient par une valeur approchée choisie suivant les circonstances; si les intervalles de temps sont petits, on peut prendre par exemple en première approximation $\rho_2 = \rho$.

Il est inutile de décrire plus amplement le détail des approximations successives. Connaissant ρ et ρ_2, on aura ρ_1, ρ'_1 comme précédemment, et de plus x, y, z, x_2, y_2, z_2 par les six équations (8) [ici au nombre de douze] correspondantes; enfin les équations (5) [ici au nombre de neuf] fourniront x', y', z', x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1. On pourra ainsi déterminer l'orbite, et l'on aura les positions qui en résultent.

Des six équations (8) restantes, savoir

$$x_1 = \lambda_1 \rho_1 - X_1, \qquad x'_1 = \lambda'_1 \rho'_1 - X'_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

celles relatives aux coordonnées x_1, y_1, x'_1, y'_1, seront nécessairement vérifiées, d'après la façon dont on a choisi les équations en ρ et ρ_2, tandis que les deux dernières ne le seront que dans la mesure où les observations données sont réellement concordantes.

En d'autres termes, les ascensions droites (si le plan fondamental est celui de l'équateur) seront toutes exactement représentées, ainsi que les déclinaisons relatives aux époques t et t_2. On disposera de l'arrangement des dates de la façon qui paraîtra présenter le plus d'avantages.

41. Indiquons encore, d'une façon toute sommaire, comment on peut déterminer une orbite circulaire, pour une petite planète dont on a n'a que deux observations aux dates t et t_1.

Conservons toujours les mêmes notations. Si l'on appelle en outre σ l'angle des deux rayons vecteurs, et a le rayon de l'orbite, on a

$$\sigma = \tau_1 a^{-\frac{3}{2}}, \qquad r = r_1 = a;$$

écrivant que la corde MM_1 est égale à $2a\sin\frac{\sigma}{2}$, on a de plus

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 = 4a^2 \sin^2\frac{\sigma}{2}.$$

Mais

$$x = \lambda\rho - X, \qquad y = \mu\rho - Y, \qquad z = \nu\rho - Z,$$
$$x_1 = \lambda_1\rho_1 - X_1, \qquad y_1 = \mu_1\rho_1 - Y_1, \qquad z_1 = \nu_1\rho_1 - Z_1,$$

de sorte que les relations $r = r_1 = a$ donnent

$$\rho^2 - 2\rho\ R\ \cos\psi + R^2 - a^2 = 0,$$
$$\rho_1^2 - 2\rho_1 R_1 \cos\psi_1 + R_1^2 - a^2 = 0,$$

en faisant

$$R\cos\psi = \lambda X + \mu Y + \nu Z, \qquad R_1\cos\psi_1 = \lambda_1 X_1 + \mu_1 Y_1 + \nu_1 Z_1.$$

On doit supposer a supérieur à R et R_1 ; faisant

$$\xi = \sqrt{a^2 - R^2\sin^2\psi}, \qquad \xi_1 = \sqrt{a^2 - R_1^2\sin^2\psi_1},$$

on a donc

$$\rho = R\cos\psi + \xi, \qquad \rho_1 = R_1\cos\psi_1 + \xi_1,$$

d'où

$$x_1 - x = \lambda_1 R_1 \cos\psi_1 - \lambda R\cos\psi - X_1 + X + \lambda_1\xi_1 - \lambda\xi, \qquad \ldots,$$

et si l'on fait encore pour abréger l'écriture

$$l = \lambda_1 R_1 \cos\psi_1 - \lambda R\cos\psi - X_1 + X,$$
$$m = \mu_1 R_1 \cos\psi_1 - \mu R\cos\psi - Y_1 + Y,$$
$$n = \nu_1 R_1 \cos\psi_1 - \nu R\cos\psi - Z_1 + Z,$$

on a finalement l'équation

$$(l + \lambda_1\xi_1 - \lambda\xi)^2 + (m + \mu_1\xi_1 - \mu\xi)^2 + (n + \nu_1\xi_1 - \nu\xi)^2 - 4a^2\sin^2\frac{\sigma}{2} = 0,$$

qui, jointe aux relations qui définissent σ, ξ et ξ_1, permet de résoudre le problème. On procédera nécessairement par approximations successives, en choisissant comme inconnue principale a; et à défaut de tout autre renseignement, on partira d'une valeur de a vraisemblable telle que $a = [0,400]$. Pour appliquer la méthode d'approximation de Newton, appelons $f(a)$ le premier membre de l'équation ci-dessus, qu'on peut encore écrire, en introduisant des notations évidentes et développant le dernier terme en série,

$$L^2 + M^2 + N^2 - \frac{\tau_1^2}{a} + \frac{\tau_1^4}{12a^4} - \ldots = 0;$$

on a pour calculer la dérivée $f'(a)$ la formule assez simple

$$f'(a) = 2a\left[L\left(\frac{\lambda_1}{\xi_1} - \frac{\lambda}{\xi}\right) + M\left(\frac{\mu_1}{\xi_1} - \frac{\mu}{\xi}\right) + N\left(\frac{\nu_1}{\xi_1} - \frac{\nu}{\xi}\right) + \frac{\tau_1^2}{2a^3} - \frac{\tau_1^4}{6a^6} + \ldots\right].$$

42. Nous allons enfin, pour terminer ce Chapitre, dire un mot du problème de la détermination des orbites lorsqu'on suppose que la même observation a pu fournir non seulement les coordonnées de l'astre observé, mais encore, d'une façon suffisamment approchée, son mouvement, c'est-à-dire les dérivées premières de ses coordonnées pour l'époque de l'observation. C'est ce qui arrive en fait quand l'astre a été observé photographiquement, et que la pose est suffisamment prolongée (*voir* à ce sujet l'article de M. Luc Picart, *Bulletin astronomique*, t. XXXIII, 1915).

Il suffit de reprendre la méthode générale, en supposant par exemple que l'époque t_2 coïncide avec l'époque t, et en introduisant les dérivées du premier ordre des éléments correspondants.

L'observation fournit les dérivées α', δ' des coordonnées observées α, δ; et par suite les dérivées λ', μ', ν' de λ, μ, ν, soit

$$\begin{aligned}
\lambda' &= -\mu\alpha' - \lambda \operatorname{tang}\delta.\delta',\\
\mu' &= \lambda\alpha' - \mu \operatorname{tang}\delta.\delta',\\
\nu' &= \cos\delta.\delta'.
\end{aligned}$$

Les dérivées X', Y', Z' des coordonnées X, Y, Z du Soleil sont fournies par l'interpolation de l'éphéméride de cet astre, suivant les règles bien connues, expliquées d'ailleurs plus loin; en toute rigueur, on devra tenir compte de la correction de parallaxe, mais c'est presque toujours inutile en raison du peu de précision que l'on peut obtenir dans le cas actuel. Bien entendu, toutes ces dérivées sont prises, comme x', y', z', par rapport à la variable $\tau = kt$, l'unité de t étant le jour moyen.

Conservant, sauf exception spécifiée, toutes les notations déjà employées, on a les équations évidentes

$$\begin{aligned}
x &= \lambda\rho - X, & x_1 &= \lambda_1\rho_1 - X_1 = f_1 x + g_1 x', & x' &= \lambda'\rho + \lambda\rho' - X',\\
y &= \mu\rho - Y, & y_1 &= \mu_1\rho_1 - Y_1 = f_1 y + g_1 y', & y' &= \mu'\rho + \mu\rho' - Y',\\
z &= \nu\rho - Z, & z_1 &= \nu_1\rho_1 - Z_1 = f_1 z + g_1 z', & z' &= \nu'\rho + \nu\rho' - Z',
\end{aligned}$$

aux douze inconnues $x, y, z, x', y', z', x_1, y_1, z_1, \rho, \rho', \rho_1$. Il en résulte

$$\begin{aligned}
\rho(\lambda f_1 + \lambda' g_1) + \lambda g_1 \rho' - \lambda_1\rho_1 &= A = f_1 X + g_1 X' - X_1,\\
\rho(\mu f_1 + \mu' g_1) + \mu g_1 \rho' - \mu_1\rho_1 &= B = f_1 Y + g_1 Y' - Y_1,\\
\rho(\nu f_1 + \nu' g_1) + \nu g_1 \rho' - \nu_1\rho_1 &= C = f_1 Z + g_1 Z' - Z_1;
\end{aligned}$$

et par suite en faisant

$$\Delta = |\lambda\ \lambda_1\ \lambda'|, \qquad D = |\lambda\ \lambda_1\ A|,$$

on a

$$\rho g_1 \Delta = D,$$

et, par exemple,

$$\rho_1(\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu) = \rho g_1(\lambda\mu' - \lambda'\mu) + \mu A - \lambda B,$$

avec

$$\lambda(g_1\rho' + f_1\rho) = \lambda_1\rho_1 - \lambda' g_1\rho + A.$$

Comme on doit actuellement se borner à la première approximation, on fera

$$f_1 = 1 - \frac{\tau_1^2}{2r^3}, \qquad g_1 = \tau_1 - \frac{\tau_1^3}{6r^3},$$

et l'on voit immédiatement, sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans de plus grands détails, que l'on est ramené aux mêmes équations que précédemment.

Dans le cas où l'on a une seule observation, fournissant les coordonnées de l'astre et aussi leurs dérivées, on peut déterminer une orbite circulaire répondant à ces données. On a comme plus haut

$$x = \lambda\rho - X, \qquad y = \mu\rho - Y, \qquad z = \nu\rho - Z,$$

avec

$$x' = \lambda'\rho + \lambda\rho' - X', \qquad y' = \mu'\rho + \mu\rho' - Y', \qquad z' = \nu'\rho + \nu\rho' - Z';$$

de plus, d'après les propriétés du mouvement circulaire,

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad xx' + yy' + zz' = 0, \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{1}{a}.$$

Faisons comme précédemment

$$R\cos\psi = \lambda X + \mu Y + \nu Z, \qquad \xi = \sqrt{a^2 - R^2\sin^2\psi},$$

de sorte que

$$\rho = R\cos\psi + \xi.$$

En se servant de la relation $\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0$, il vient

$$\rho'\xi = \rho(\lambda' X + \mu' Y + \nu' Z + \lambda X' + \mu Y' + \nu Z') - (XX' + YY' + ZZ'),$$

et en posant

$$h = R\cos\psi(\lambda' X + \mu' Y + \nu' Z + \lambda X' + \mu Y' + \nu Z') - (XX' + YY' + ZZ'),$$

$$l = \lambda' R\cos\psi + \lambda(\lambda' X + \mu' Y + \nu' Z + \lambda X' + \mu Y' + \nu Z') - X',$$

$$m = \mu' R\cos\psi + \mu(\lambda' X + \mu' Y + \nu' Z + \lambda X' + \mu Y' + \nu Z') - Y',$$

$$n = \nu' R\cos\psi + \nu(\lambda' X + \mu' Y + \nu' Z + \lambda X' + \mu Y' + \nu Z') - Z',$$

on obtient l'équation

$$\left(l + \lambda'\xi + \frac{\lambda h}{\xi}\right)^2 + \left(m + \mu'\xi + \frac{\mu h}{\xi}\right)^2 + \left(n + \nu'\xi + \frac{\nu h}{\xi}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + R^2\sin^2\psi}} = 0,$$

propre à déterminer l'inconnue ξ par approximations successives; les autres inconnues s'en déduisent immédiatement.

CHAPITRE VIII.

DÉTERMINATION
D'UNE ORBITE KÉPLÉRIENNE PAR TROIS OBSERVATIONS QUELCONQUES, EN PARTANT D'UNE SOLUTION APPROCHÉE.

---

43. Reprenons le problème général étudié au Chapitre précédent, celui de la détermination d'une orbite képlérienne par trois observations, mais sans supposer que ces observations soient rapprochées. Il faut alors, pour atteindre le but poursuivi, partir d'une solution approchée : celle-ci est fournie par une première orbite provisoire déterminée par d'autres observations plus voisines; ou bien, encore, si les observations ne sont pas trop éloignées les unes des autres, et si les circonstances sont favorables, par l'application de la méthode du Chapitre précédent, mais limitée à la première ou à la seconde approximation, car la convergence des approximations successives est alors trop lente pour qu'il y ait avantage à les continuer plus loin.

Dans tous les cas, nous supposerons bien entendu les observations préparées de façon qu'il n'y ait pas à s'occuper des corrections d'aberration ou de parallaxe, et toutes les coordonnées seront rapportées aux mêmes axes de référence : nous conserverons aussi toutes les notations précédemment employées.

La méthode à appliquer est la méthode différentielle de Newton : il faut chercher les corrections que l'on doit apporter aux éléments de l'orbite provisoire qui sert de point de départ, pour représenter exactement les observations, en supposant ces corrections assez petites pour qu'on en puisse négliger les carrés et les produits, c'est-à-dire, plus exactement, en supposant que les équations qui les déterminent peuvent être réduites à la forme linéaire; si cette hypothèse n'est pas suffisamment justifiée, il sera nécessaire de recommencer.

Si ρ désigne la valeur exacte, inconnue d'ailleurs, de la distance géocentrique à l'époque t, et si λ, μ, ν sont les cosinus directeurs de la direction observée, les éléments provisoires fourniront pour ces quantités des valeurs approchées ρ', λ', μ', ν', déterminées par les équations

$$\lambda'\rho' = x + X, \qquad \mu'\rho' = y + Y, \qquad \nu'\rho' = z + Z,$$

en appelant x, y, z les coordonnées héliocentriques qui correspondent à ces mêmes éléments pour l'époque t. Si ces éléments varient, et reçoivent leurs valeurs véritables, x, y, z prennent des accroissements dx, dy, dz, et l'on doit avoir alors

$$\lambda\rho = x + dx + X, \qquad \mu\rho = y + dy + Y, \qquad \nu\rho = z + dz + Z.$$

Par suite, si l'on fait

$$\rho = \rho' + d\rho, \qquad \lambda = \lambda' + d\lambda, \qquad \mu = \mu' + d\mu, \qquad \nu = \nu' + d\nu,$$

on a les équations de condition rigoureuses

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} dx &= \lambda\, d\rho + \rho'\, d\lambda, \\ dy &= \mu\, d\rho + \rho'\, d\mu, \\ dz &= \nu\, d\rho + \rho'\, d\nu. \end{aligned} \right.$$

Pour les dates t_1 et t_2, on a deux groupes d'équations semblables.

Les corrections dx, dy, dz sont, d'après l'hypothèse faite, des fonctions linéaires et homogènes des corrections qu'il faut donner aux six éléments de l'orbite provisoire; et, par suite, on a ainsi neuf équations linéaires propres à déterminer ces six corrections, en même temps que les inconnues auxiliaires $d\rho$, $d\rho_1$, $d\rho_2$.

On peut choisir pour les éléments fondamentaux, dont on cherche ainsi directement les corrections, les éléments proprement dits de l'orbite provisoire, et calculer alors dx, dy, dz comme nous l'avons indiqué à la fin du Chapitre V. Mais, bien souvent, ces éléments peuvent varier dans d'assez larges limites, sans cesser de représenter convenablement les observations, surtout si celles-ci ne sont pas trop éloignées; et alors l'hypothèse faite sur l'ordre de grandeur de leurs corrections n'est plus suffisamment légitime. Il n'en est pas de même, comme l'a montré Th. von Oppolzer, si l'on prend comme éléments fondamentaux précisément les coordonnées x, y, z et leurs dérivées x', y', z', pour l'époque t, ainsi que nous l'avons fait pré-

cédemment. Et en effet, d'abord les équations de conditions relatives à l'époque t sont entièrement rigoureuses; puis, si cet avantage n'est pas entièrement conservé pour celles relatives aux époques t_1 et t_2, il l'est du moins d'une façon approchée, comme le montre la forme des coordonnées $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, telle que

$$x_1 = f_1 x + g_1 x',$$

d'après le fait évident que les coefficients f_1 et g_1 ont en général des variations qui sont petites relativement à leurs propres valeurs.

En adoptant ce choix, les quantités $\rho'_1, \lambda'_1, \mu'_1, \nu'_1$ sont déterminées par les équations

$$\lambda'_1 \rho'_1 = x_1 + X_1, \qquad \mu'_1 \rho'_1 = y_1 + Y_1, \qquad \nu'_1 \rho'_1 = z_1 + Z_1,$$

en prenant si l'on veut

$$x_1 = f_1 x + g_1 x', \qquad y_1 = f_1 y + g_1 y', \qquad z_1 = f_1 z + g_1 z',$$

ou en calculant directement ces coordonnées; et les équations de condition correspondantes prennent la forme

$$(2) \quad \begin{cases} f_1\, dx + g_1\, dx' + x\, df_1 + x'\, dg_1 = \lambda_1\, d\rho_1 + \rho'_1\, d\lambda_1, \\ f_1\, dy + g_1\, dy' + y\, df_1 + y'\, dg_1 = \mu_1\, d\rho_1 + \rho'_1\, d\mu_1, \\ f_1\, dz + g_1\, dz' + z\, df_1 + z'\, dg_1 = \nu_1\, d\rho_1 + \rho'_1\, d\nu_1, \end{cases}$$

en appelant df_1, dg_1 les différentielles totales de f_1, g_1 par rapport à x, y, z, x', y', z'.

Les équations relatives à l'époque t_2 sont les mêmes, en mettant l'indice 2 à la place de l'indice 1.

On voit ainsi que tout revient à la détermination, à l'aide des éléments provisoires donnés : 1° de x, y, z, x', y', z'; 2° de f_1, g_1, f_2, g_2 et de leurs dérivées partielles par rapport à x, y, z, x', y', z'.

Les équations (1) et (2) seront ensuite résolues sans peine; on pourra avantageusement garder l'inconnue auxiliaire $d\rho$, et éliminer d'abord dx, dy, dz par les équations (1); on procédera ensuite à l'élimination successive des autres inconnues suivant la façon qui semblera la plus avantageuse, suivant les cas. Il est à peine utile d'ajouter que les coefficients des équations (2) n'ont pas besoin d'être calculés avec une exactitude superflue.

44. Si l'orbite provisoire est déterminée par ses éléments propre-

ment dits, on calculera d'abord les coordonnées $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ suivant les règles ordinaires, en déterminant les constantes de Gauss, les rayons vecteurs r, r_1, r_2, et les anomalies vraies v, v_1, v_2; et l'on retiendra les valeurs des anomalies excentriques u, u_1, u_2, si on les a calculées avec une précision suffisante.

Pour obtenir x', y', z', on se servira ensuite des formules telles que

$$x = r \sin a \sin(v + A),$$

qui donnent par différentiation

$$x' = r' \sin a \sin(v + A) + rv' \sin a \cos(v + A),$$

d'où, en remplaçant r' par sa valeur connue $\frac{e \sin v}{\sqrt{p}}$ (n° 27), et rv' par $\frac{\sqrt{p}}{r}$ ou $\frac{1 + e \cos v}{\sqrt{p}}$,

$$x' = \frac{\sin a}{\sqrt{p}} [\cos(v + A) + e \cos A],$$

ainsi qu'il résulte d'ailleurs de la formule (12) du Chapitre V en ne tenant compte que de la variation de dM.

Dans le cas d'une orbite parabolique, on a plus simplement

$$x' = \frac{2 \sin a}{\sqrt{p}} \cos \frac{v}{2} \cos \left(\frac{v}{2} + A\right).$$

Ces calculs doivent être exécutés avec une précision égale à celle des observations, tandis que ceux qui suivent ne demandent que l'exactitude nécessaire à la formation des coefficients des équations de condition (2).

On calculera r' par l'une ou l'autre des formules

$$r' = \frac{xx' + yy' + zz'}{r} = \frac{e \sin v}{\sqrt{p}} = \frac{e \sin u}{r} \sqrt{a},$$

dont la dernière résulte des formules (1) du Chapitre V, par exemple; on peut aussi vérifier que l'on a

$$V^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a},$$

et obtenir ainsi V^2, ce qui n'est pas toujours nécessaire, ainsi que la suite le montrera.

Pour avoir f_1 et g_1 (et il en sera de même de f_2 et g_2), il suffira d'appliquer l'une ou l'autre des diverses formules indiquées au Chapitre VI, y compris les développements en série du n° 30. En particulier, on aura, de la façon la plus simple,

$$g_1 = \frac{rr_1 \sin(v_1 - v)}{\sqrt{p}};$$

puis, en se servant des trois dernières équations (3) du n° 29, on peut poser, ce qui nous sera utile plus loin,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{rr_1}{p}} \sin\frac{v_1 - v}{2} = \sqrt{a} \sin\frac{u_1 - u}{2},$$

et écrire

$$f_1 = 1 - \frac{2\omega_1^2}{r}.$$

Si l'orbite primitive est déterminée par les valeurs mêmes de x, y, z, x', y', z', ce qui fait connaître immédiatement r, r' et V^2, on obtiendra alors x_1, y_1, z_1 par les relations telles que

$$x_1 = f_1 x + g_1 x',$$

en calculant d'abord f_1 et g_1 avec une précision comparable à celle des observations. A cet effet, il faudra déterminer les éléments a, p, e de l'orbite, ainsi que v et l'anomalie moyenne correspondante M (ou la quantité P qui la remplace quand il s'agit d'une orbite à forte excentricité), comme nous l'avons vu au n° 27; on en déduit aisément, d'après la valeur de τ_1, l'anomalie vraie v_1 et le rayon vecteur r_1, d'où f_1 et g_1 comme ci-dessus.

Lorsque la détermination des anomalies excentriques est possible avec exactitude, on peut éviter le calcul des anomalies vraies v et v_1 comme celui de p, et réduire la précision du calcul de r_1 (si même cette quantité est nécessaire par la suite) à celle qui convient pour la formation des équations (2). Dans ce cas, en effet, on écrira d'abord

$$e \sin u = \frac{rr'}{\sqrt{a}},$$

$$e \cos u = 1 - \frac{r}{a},$$

et l'on déduira M, puis u_1 de u. On observera ensuite que l'on a, en

éliminant τ_1 entre l'équation (e) et la seconde des relations (g) du n° 28,

$$g_1 = a^{\frac{3}{2}}[\sin(u_1 - u) - e\sin u_1 + e\sin u],$$

ou, en remplaçant $\sin u_1$ par le développement de $\sin[(u_1 - u) + u]$ et tenant compte des relations ci-dessus,

$$g_1 = r\sqrt{a}\sin(u_1 - u) + arr'[1 - \cos(u_1 - u)],$$

c'est-à-dire finalement

$$g_1 = 2\omega_1 r\left(\cos\frac{u_1 - u}{2} + r'\omega_1\right),$$

et l'on a ainsi pour calculer g_1 une nouvelle formule simple qui n'exige que la connaissance de u_1 outre a, r, r' et u.

Ajoutons enfin que si les valeurs de x, y, z ont été choisies telles que l'observation de l'époque t soit exactement représentée, on aura

$$d\lambda = d\mu = d\nu = 0,$$

ce qui simplifie les équations (1) et leur usage.

45. Il ne nous reste plus qu'à expliquer le calcul des dérivées partielles de f_1 et g_1 par rapport à x, y, z, x', y', z'.

Comme nous le savons d'après les développements du n° 30, les quantités f_1 et g_1 ne dépendent de x, y, z, x', y', z' que par l'intermédiaire de r, de rr' et de V^2. Si donc on fait

$$F_0 = \frac{1}{r}\frac{\partial f_1}{\partial r}, \qquad F_1 = \frac{\partial f_1}{\partial(rr')}, \qquad F_2 = 2\frac{\partial f_1}{\partial(V^2)},$$
$$G_0 = \frac{1}{r}\frac{\partial g_1}{\partial r}, \qquad G_1 = \frac{\partial g_1}{\partial(rr')}, \qquad G_2 = 2\frac{\partial g_1}{\partial(V^2)},$$

on aura immédiatement, d'après les expressions de r^2, rr' et V^2 à l'aide de x, y, z, x', y, z',

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = F_0 x + F_1 x', \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x'} = F_1 x + F_2 x',$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = F_0 y + F_1 y', \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y'} = F_1 y + F_2 y',$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = F_0 z + F_1 z', \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z'} = F_1 z + F_2 z',$$

et de même

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = G_0\, x + G_1\, x', \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x'} = G_1\, x + G_2\, x',$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = G_0\, y + G_1\, y', \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y'} = G_1\, y + G_2\, y',$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial z} = G_0\, z + G_1\, z', \qquad \frac{\partial g_1}{\partial z'} = G_1\, z + G_2\, z'.$$

La détermination de F_0, F_1, F_2, G_0, G_1, G_2 peut se faire dans certains cas, quand la quantité $\tau_1\, r^{-\frac{3}{2}}$ n'est pas trop grande, en partant des développements en série (6) du n° **30**. Si l'on peut, au degré d'approximation requis, laisser de côté les termes en τ_1^5, sans quoi le procédé cesserait d'être commode, on trouve immédiatement :

$$F_0 = \frac{3}{2}\frac{\tau_1^2}{r^5} - \frac{5}{2}\frac{r'\tau_1^3}{r^6} + \tau_1^4\left(\frac{1}{2\,r^8} + \frac{5}{8}\,\frac{7\,r'^2 - V^2}{r^7}\right),$$

$$F_1 = G_0 = \frac{\tau_1^3}{2\,r^5} - \frac{5}{4}\frac{r'\tau_1^4}{r^6},$$

$$F_2 = G_1 = \frac{\tau_1^4}{4\,r^5},$$

$$G_2 = 0.$$

Dans tous les cas, on calculera exactement les coefficients F_0, G_0, ... de la façon suivante, qui conduit finalement à des résultats presque aussi simples. Posons, pour abréger les notations,

$$u_1 - u = 2\varphi_1, \qquad e \sin u = h, \qquad e \cos u = k,$$

et remplaçons, partout où il figurera, l'angle u_1 par $u + 2\varphi_1$.

D'après la seconde équation (g) du n° 28, on a

$$(\beta) \qquad g_1 = \tau_1 - a^{\frac{3}{2}}(2\varphi_1 - \sin 2\varphi_1),$$

et, d'après la valeur de f_1 donnée ci-dessus,

$$(\alpha) \qquad f_1 = 1 - \frac{2a}{r}\sin^2\varphi_1.$$

La différence des anomalies moyennes M_1 et M étant égale à $\tau_1\, a^{-\frac{3}{2}}$, on a aussi, pour déterminer φ_1,

$$\tau_1\, a^{-\frac{3}{2}} = u_1 - u - e \sin u_1 + e \sin u,$$

c'est-à-dire

$$(\gamma) \qquad \tau_1 a^{-\frac{3}{2}} = 2\varphi_1 + h(1 - \cos 2\varphi_1) - k \sin 2\varphi_1,$$

et nous joindrons à cette formule celle qui détermine r_1; partant de

$$r_1 = a(1 - e \cos u_1),$$

il vient

$$(\gamma') \qquad r_1 = a(1 + h \sin 2\varphi_1 - k \cos 2\varphi_1).$$

Enfin, d'après des relations écrites au numéro précédent, on a

$$(\delta) \qquad h = \frac{rr'}{\sqrt{a}}, \qquad k = 1 - \frac{r}{a}, \qquad \frac{1}{a} = \frac{2}{r} - V^2.$$

Différentions les six relations (α), (β), (γ) et (δ), en tenant compte de (γ'); il vient

$$df_1 = \frac{2a}{r^2} \sin^2 \varphi_1 \, dr - \frac{2}{r} \sin^2 \varphi_1 \, da - \frac{4a}{r} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \, d\varphi_1,$$

$$dg_1 = -\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} (2\varphi_1 - \sin 2\varphi_1) \, da - 4 a^{\frac{3}{2}} \sin^2 \varphi_1 \, d\varphi_1,$$

$$r_1 \, d\varphi_1 = -\frac{3}{4} \tau_1 a^{-\frac{3}{2}} \, da - a \sin^2 \varphi_1 \, dh + a \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \, dk,$$

$$dh = a^{-\frac{1}{2}} d(rr') - \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}} (rr') \, da,$$

$$dk = \frac{r}{a^2} da - \frac{1}{a} dr,$$

$$da = 2 \frac{a^2}{r^2} dr + a^2 d(V^2).$$

En éliminant da, dh, dk, $d\varphi_1$ entre ces relations, on a immédiatement les différentielles df_1 et dg_1 exprimées à l'aide de dr, $d(rr')$ et $d(V^2)$, et par suite F_0, G_0, ...

On trouve ainsi d'abord, en introduisant la quantité ω_1 définie plus haut,

$$F_1 = \frac{4\omega_1^3 \cos \varphi_1}{rr_1}, \qquad G_1 = \frac{4\omega_1^4}{r_1},$$

$$F_0 = \frac{F_2}{r^3} + \frac{2\omega_1^2}{r^3}\left(1 + 2\frac{r}{r_1}\cos^2 \varphi_1\right),$$

$$G_0 = \frac{G_2}{r^3} + F_1,$$

et si l'on a déterminé ω_1 sans passer par les anomalies excentriques,

on aura, pour calculer $\cos\varphi_1$, la formule

$$\cos\varphi_1 = \sqrt{1 - \frac{\omega_1^2}{a}}.$$

On a ensuite directement

$$r r_1 F_2 = 6\tau_1 a^{\frac{3}{2}} \sin\varphi_1 \cos\varphi_1 - 4a^2 r_1 \sin^2\varphi_1 - 8a^2 r \sin^2\varphi_1 \cos^2\varphi_1 - 4a^{\frac{5}{2}} r r' \sin^3\varphi_1 \cos\varphi_1,$$

$$r_1 G_2 = 6\tau_1 a^2 \sin^2\varphi_1 - 3a^{\frac{3}{2}} r_1 (2\varphi_1 - \sin 2\varphi_1) - 8a^{\frac{5}{2}} r \sin^3\varphi_1 \cos\varphi_1 - 4a^3 r r' \sin^4\varphi_1;$$

pour obtenir des formules plus simples, et surtout plus propres au calcul numérique quand φ_1 n'a qu'une valeur médiocrement grande, remplaçons dans les seconds membres τ_1 et r_1 par leurs valeurs fournies par les relations (γ) et (γ'); il vient

$$r r_1 F_2 = 4a^2 r \sin^4\varphi_1 - 4a^3(3\sin^2\varphi_1 - \sin^4\varphi_1 - 3\varphi_1 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1),$$

$$r_1 G_2 = 2a^{\frac{5}{2}} r (3\sin\varphi_1 \cos\varphi_1 - 4\sin^3\varphi_1 \cos\varphi_1 - 3\varphi_1 \cos 2\varphi_1) + 4a^3 r r'(3\sin^2\varphi_1 - \sin^4\varphi_1 - 3\varphi_1 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1).$$

Remarquons alors l'identité

$$3\sin\varphi_1 \cos\varphi_1 - 4\sin^3\varphi_1 \cos\varphi_1 - 3\varphi_1 \cos 2\varphi_1 = \frac{\cos 2\varphi_1}{\sin\varphi_1 \cos\varphi_1}(3\sin^2\varphi_1 - \sin^4\varphi_1 - 3\varphi_1 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1) + 2\frac{\sin^5\varphi_1}{\cos\varphi_1},$$

et posons

$$P_1 = \frac{\sin\varphi_1(3 - \sin^2\varphi_1) - 3\varphi_1 \cos\varphi_1}{2\sin^5\varphi_1};$$

on a finalement

$$F_2 = G_1 - 8\frac{\omega_1^6}{r r_1} P_1,$$

$$G_2 = 4\frac{r\omega_1^5}{r_1} \operatorname{séc}\varphi_1 (1 + P_1 \cos 2\varphi_1) + \frac{8 r r' \omega_1^6}{r_1} P_1;$$

et d'ailleurs, en fonction de ω_1,

$$\cos 2\varphi_1 = 1 - \frac{2\omega_1^2}{a}.$$

On voit ainsi que tout revient au calcul de P_1; ce calcul se fera directement si l'angle φ_1 est suffisamment grand. Sinon, on observera

que l'on a justement

$$P_1 = s_1 \operatorname{séc} \varphi_1,$$

en appelant s_1 la valeur que prend la fonction s de l'angle u définie au nº 23, lorsque l'on suppose $u = 2\varphi_1$. Par suite, on peut encore écrire

$$P_1 = m_1 \operatorname{séc}^{\frac{8}{7}} \varphi_1,$$

m_1 étant la valeur de la fonction m que l'on trouve dans la Table VI pour l'argument φ_1 : cette valeur diffère peu de $\frac{1}{5}$ tant que l'angle φ_1 est inférieur en valeur absolue à 40°.

Bien entendu, dans le cas d'une orbite hyperbolique, $\cos\varphi_1$ devient supérieur à l'unité, puisque a est négatif. Il faut alors, pour calculer P_1, ainsi que nous l'avons déjà vu dans des cas semblables, remplacer l'angle φ_1 par l'angle φ'_1 tel que

$$\operatorname{séc} \varphi'_1 = \cos \varphi_1 \qquad \text{ou} \qquad \omega_1 = \sqrt{-a} \operatorname{tang} \varphi'_1;$$

on aura alors, en effet,

$$P_1 = m'_1 \cos^{\frac{8}{7}} \varphi'_1,$$

m'_1 étant la valeur de la fonction m' qui correspond à l'argument φ'_1, toujours dans la Table VI.

En réunissant l'ensemble des formules nécessaires pour résoudre le problème proposé dans ce Chapitre, nous avons finalement :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{rr_1}{p}} \sin \frac{v_1 - v}{2} = \sqrt{a} \sin \varphi_1, \qquad u_1 - u = 2\varphi_1,$$

$$\cos \varphi_1 = \sqrt{1 - \frac{\omega_1^2}{a}}, \qquad \cos 2\varphi_1 = 1 - \frac{2\omega_1^2}{a},$$

$$f_1 = 1 - \frac{2\omega_1^2}{r}, \qquad g_1 = \frac{rr_1 \sin(v_1 - v)}{\sqrt{p}} = 2\omega_1 r(\cos\varphi_1 + r'\omega_1),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = F_0 x + F_1 x', \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x'} = F_1 x + F_2 x', \qquad \ldots,$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = G_0 x + G_1 x', \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x'} = G_1 x + G_2 x', \qquad \ldots,$$

$$F_1 = \frac{4\omega_1^3 \cos\varphi_1}{rr_1}, \qquad G_1 = \frac{4\omega_1^4}{r_1},$$

$$F_2 = G_1 - \frac{8\omega_1^6 P_1}{rr_1}, \qquad G_2 = \frac{4r\omega_1^5 \operatorname{séc}\varphi_1}{r_1}(1 + P_1 \cos 2\varphi_1 + 2r'\omega_1 P_1 \cos\varphi_1),$$

$$F_0 = \frac{F_2}{r^3} + \frac{2\omega_1^2}{r^3}\left(1 + 2\frac{r}{r_1}\cos^2\varphi_1\right), \qquad G_0 = \frac{G_2}{r^3} + F_1,$$

$$P_1 = \frac{\sin\varphi_1(3 - \sin^2\varphi_1) - 3\varphi_1 \cos\varphi_1}{2\sin^5\varphi_1} = m_1 \operatorname{séc}^{\frac{8}{7}}\varphi_1.$$

46. Choisissons d'abord, pour montrer l'application de la méthode que nous venons de développer, l'exemple bien connu de la planète Cérès traité par Gauss (*Theoria Motus*, art. 159). En temps de Paris, les dates sont

$$t = 1805 \text{ Septembre } 139,42711,$$
$$t_1 = \text{»} \quad \text{»} \quad 5,51366,$$
$$t_2 = \text{»} \quad \text{»} \quad 265,39813;$$

les observations sont corrigées de l'aberration et de la parallaxe, rapportées à l'écliptique et à l'équinoxe moyens de 1806,0; on a

$$\begin{aligned} \alpha &= 99^\circ.49'.\ 5'',87, & \delta &= 7^\circ.16'.36'',80,\\ \alpha_1 &= 95.32.18,56, & \delta_1 &= -0.59.34,06,\\ \alpha_2 &= 118.\ 5.28,85, & \delta_2 &= 7.38.49,39;\end{aligned}$$

pour le Soleil, les latitudes sont nulles, tandis que les longitudes et les rayons vecteurs sont

$$\begin{aligned} \odot &= 297^\circ.12'.43'',25, & R &= [\bar{1},9929861],\\ \odot_1 &= 162.54.56,00, & R_1 &= [0,0031514],\\ \odot_2 &= 61.58.50,71, & R_2 &= [0,0056974].\end{aligned}$$

Par suite,

$$\tau_1 = [0,3624066-], \qquad \tau_2 = [0,3358520], \qquad \tau = [0,65036],$$

$$\begin{aligned} X &= [\bar{1},6531725], & X_1 &= [\bar{1},9835515-], & X_2 &= [\bar{1},6775810],\\ Y &= [\bar{1},9420444-], & Y_1 &= [\bar{1},4711748], & Y_2 &= [\bar{1},9515547],\\ Z &= 0, & Z_1 &= 0, & Z_2 &= 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= [\bar{1},2282738-], & \lambda_1 &= [\bar{2},9845269-], & \lambda_2 &= [\bar{1},6690294-],\\ \mu &= [\bar{1},9900800], & \mu_1 &= [\bar{1},9979026], & \mu_2 &= [\bar{1},9416865],\\ \nu &= [\bar{1},1026549], & \nu_1 &= [\bar{2},2387150-], & \nu_2 &= [\bar{1},1240813].\end{aligned}$$

Malgré la grandeur des intervalles de temps, on arrive facilement à une solution approchée en appliquant la méthode du Chapitre précédent, les circonstances étant favorables, comme le montrent les résultats.

Mais il n'est pas utile de chercher ici une précision supérieure à celle d'un calcul à quatre décimales.

On a d'abord

$$\Delta = [\bar{2},6398], \qquad D' = [\bar{1},4837], \qquad P = [0,1935],$$
$$S = [\bar{1},9691], \qquad R^2 = [\bar{1},9860].$$

En première approximation, en dehors de tout renseignement, il vient

$$\gamma = [1,1729 -], \qquad \gamma_1 = [0,3090], \qquad \gamma_2 = [0,2294 -],$$

d'où

$$D'' = [\bar{1},8839 -], \qquad Q = [0,5937 -], \qquad q = [0,5225].$$

L'équation fondamentale

$$\rho = P + \frac{Q + q\rho}{r^3}$$

donne alors (l'usage de la Table VII est d'ailleurs ici impossible, car les hypothèses correspondantes sont bien loin d'être vérifiées)

$$\rho = [0,2177],$$

d'où

$$x = [\bar{1},8629 -], \qquad y = [0,3960], \qquad z = [\bar{1},3204];$$

puis

$$\rho_1 = [0,4590], \qquad \rho_2 = [0,4711],$$
$$x' = [\bar{1},7773 -], \qquad y' = [\bar{1},3369 -], \qquad z' = [\bar{1},0178].$$

Ce premier résultat est manifestement insuffisant, et il faut recommencer de la même façon en le prenant maintenant pour point de départ.

En se servant uniquement des valeurs ci-dessus de x, y, z, x', y', z', on trouve successivement

$$V^2 = [\bar{1},61975], \qquad r' = [\bar{2},49918 -], \qquad a = [0,45343],$$
$$p = [0,44930], \qquad e = [\bar{2},9874],$$
$$v = -33^\circ,03, \qquad M_1 = -54^\circ,88, \qquad M_2 = -1^\circ,37,$$
$$u = -30,10, \qquad u_1 = -59,68, \qquad u_2 = -1,52,$$
$$M = -27,31, \qquad v_1 = -64,62, \qquad v_2 = -1,68,$$
$$r_1 = [0,4316], \qquad r_2 = [0,4090];$$

d'où les nouvelles valeurs

$$\gamma = [1,1450-],\quad \gamma_1 = [0,2808\ ],\quad \gamma_2 = [0,2364-],$$
$$\varphi_1 = [0,3992-],\quad \varphi_2 = [0,3700-];$$

$$D'' = [\bar{1},8668-],\quad Q = [0,5766-],\quad q = [0,4946\ ],$$
$$\rho = [0,2145\ ],\quad \rho_1 = [0,4624\ ],\quad \rho_2 = [0,4720\ ],$$
$$x' = [\bar{1},7746-],\quad y' = [\bar{1},3319-],\quad z' = [\bar{1},0167\ ].$$

Adoptant alors, avec la précision d'un calcul à sept décimales, la valeur

$$\rho = [0,2145000],$$

on en déduit

$$x = [\bar{1},8616217-],\quad y = [0,3938855],\quad z = [\bar{1},3171549],$$

et en y joignant

$$x' = [\bar{1},7746000-],\quad y' = [\bar{1},3319000-],\quad z' = [\bar{1},0167000],$$

nous avons les éléments de l'orbite provisoire qu'il faut maintenant corriger, comme nous l'avons expliqué dans les paragraphes précédents.

On en déduit d'abord (et ces calculs peuvent être vérifiés de bien des façons, sur lesquelles il est inutile d'insister)

$$r = [0,4132385],\quad r' = [\bar{2},4762907-],\quad V^2 = [\bar{1},6139161],$$

d'où

$$a = [0,4422048],\quad e = [\bar{2},9008742],$$

$$u = -35^\circ.50'.26'',76,\quad M = -33^\circ.10'.13'',92,$$
$$M_1 = -61.49.37,05,\quad u_1 = -65.59.34,08,\quad r_1 = [0,4279],$$
$$M_2 = -\ 6.12.49,65,\quad u_2 = -\ 6.44.59,23,\quad r_2 = [0,4064],$$

$$\varphi_1 = -15.4.33,66,\quad \varphi_2 = 14.32.43,765,$$

$$\omega_1 = [\bar{1},6362433-],\quad \omega_2 = [\bar{1},6210332],$$
$$f_1 = [\bar{1},9321507\ ],\quad f_2 = [\bar{1},9370903],$$
$$g_1 = [0,3410902-],\quad g_2 = [0,3155035].$$

On a alors

$$d\lambda = d\mu = d\nu = 0,$$

d'après la façon dont on a déterminé x, y, z, et l'on trouve

$$\rho'_1 = [0,4623043], \quad d\lambda_1 = [\bar{5},8807\,-], \quad d\mu_1 = [\bar{6},807\,-], \quad d\nu_1 = [5,6953],$$
$$\rho'_2 = [0,4721139], \quad d\lambda_2 = [\bar{4},0642\,-], \quad d\mu_2 = [\bar{5},8504\,-], \quad d\nu_2 = [\bar{5},7738].$$

Continuant les calculs avec quatre décimales au plus, ce qui les rend extrêmement rapides, il vient pour la date t_1

$$\begin{aligned} F_0 &= [\bar{2},8019\ \ ], & G_0 &= [\bar{2},6927\,-], \\ F_1 &= [\bar{2},6545\,-], & G_1 &= [\bar{2},7192\ \ ], \\ F_2 &= [\bar{2},7059\ \ ], & G_2 &= [\bar{2},8576\,-], \end{aligned}$$

et pour la date t_2

$$\begin{aligned} F_0 &= [\bar{2},7859], & G_0 &= [\bar{2},6699], \\ F_1 &= [\bar{2},6315], & G_1 &= [\bar{2},6798], \\ F_2 &= [\bar{2},6675], & G_2 &= [\bar{2},7987], \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x} &= [\bar{2},2837\,-], & \frac{\partial g_1}{\partial x} &= [\bar{3},6684\ \ ], & \frac{\partial f_2}{\partial x} &= [\bar{2},8444\,-], & \frac{\partial g_2}{\partial x} &= [\bar{2},7957\,-], \\
\frac{\partial f_1}{\partial y} &= [\bar{1},2218\ \ ], & \frac{\partial g_1}{\partial y} &= [\bar{1},1249\,-], & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= [\bar{1},1526\ \ ], & \frac{\partial g_2}{\partial y} &= [\bar{1},0235\ \ ], \\
\frac{\partial f_1}{\partial z} &= [\bar{3},9276\ \ ], & \frac{\partial g_1}{\partial z} &= [\bar{3},6800\,-], & \frac{\partial f_2}{\partial z} &= [\bar{2},2337\ \ ], & \frac{\partial g_2}{\partial z} &= [\bar{2},1667\ \ ], \\
\frac{\partial f_1}{\partial x'} &= [\bar{3},4121\ \ ], & \frac{\partial g_1}{\partial x'} &= [\bar{3},6800\ \ ], & \frac{\partial f_2}{\partial x'} &= [\bar{2},7694\,-], & \frac{\partial g_2}{\partial x'} &= [\bar{2},8587\ \ ], \\
\frac{\partial f_1}{\partial y'} &= [\bar{1},0888\,-], & \frac{\partial g_1}{\partial y'} &= [\bar{1},1620\ \ ], & \frac{\partial f_2}{\partial y'} &= [\bar{2},9824\ \ ], & \frac{\partial g_2}{\partial y'} &= [\bar{1},0211\ \ ], \\
\frac{\partial f_1}{\partial z'} &= [\bar{3},6117\,-], & \frac{\partial g_1}{\partial z'} &= [\bar{3},5299\ \ ], & \frac{\partial f_2}{\partial z'} &= [\bar{2},1373\ \ ], & \frac{\partial g_2}{\partial z'} &= [\bar{2},2167\ \ ].
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} dx &= [\bar{1},2283\,-]\,d\rho, \\ dy &= [\bar{1},9901\ \ ]\,d\rho, \\ dz &= [\bar{1},1027\ \ ]\,d\rho, \end{aligned}$$

et en tenant compte de ces relations, on trouve les six équations de

condition aux six inconnues dx', dy', dz', $d\rho$, $d\rho_1$, $d\rho_2$:

$$
\begin{aligned}
&[0{,}3420\ -]\,dx' + [\bar{3}{,}445\ ]\,dy' + [4{,}981\ ]\,dz' \\
&= [\bar{1}{,}2739\ ]\,d\rho + [\bar{2}{,}9845\ -]\,d\rho_1 + [\bar{4}{,}3430\ -], \\
&[\bar{3}{,}730\ ]\,dx' + [0{,}4029\ -]\,dy' + [\bar{2}{,}0357\ -]\,dz' \\
&= [0{,}1067\ -]\,d\rho + [\bar{1}{,}9979\ ]\,d\rho_1 + [\bar{5}{,}269\ -], \\
&[\bar{3}{,}014\ ]\,dx' + [\bar{2}{,}0161\ -]\,dy' + [0{,}3412\ -]\,dz' \\
&= [\bar{1}{,}1119\ -]\,d\rho + [\bar{2}{,}2387\ -]\,d\rho_1 + [\bar{4}{,}1576\ ];
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[0{,}3332\ ]\,dx' + [\bar{1}{,}1216\ -]\,dy' + [\bar{2}{,}2961\ -]\,dz' \\
&= [\bar{1}{,}5137\ ]\,d\rho + [\bar{1}{,}6690\ -]\,d\rho_2 + [\bar{4}{,}5363\ -], \\
&[\bar{1}{,}1144\ -]\,dx' + [0{,}3585\ ]\,dy' + [\bar{2}{,}4835\ ]\,dz' \\
&= [0{,}0789\ -]\,d\rho + [\bar{1}{,}9417\ ]\,d\rho_2 + [\bar{4}{,}3225\ -], \\
&[\bar{2}{,}2947\ -]\,dx' + [\bar{2}{,}4892\ ]\,dy' + [0{,}3165\ ]\,dz' \\
&= [\bar{1}{,}1857\ -]\,d\rho + [\bar{1}{,}1241\ ]\,d\rho_2 + [\bar{4}{,}2459\ ].
\end{aligned}
$$

Pour résoudre ces équations, nous tirerons dx', dy', dz' successivement des trois premières et des trois dernières, en gardant $d\rho_1$ et $d\rho_2$ comme inconnues auxiliaires en même temps que $d\rho$: on arrive très simplement au résultat en calculant les mineurs du déterminant des inconnues, et appliquant la méthode classique, ce qui donne

$$
\begin{aligned}
dx' &= [\bar{2}{,}9285\ -]\,d\rho + [\bar{2}{,}6376\ ]\,d\rho_1 + [\bar{4}{,}0009\ ] \\
&= [\bar{1}{,}0759\ ]\,d\rho + [\bar{1}{,}2863\ -]\,d\rho_2 + [\bar{4}{,}2178\ -], \\
dy' &= [\bar{1}{,}7036\ ]\,d\rho + [\bar{1}{,}5950\ -]\,d\rho_1 + [\bar{6}{,}894\ ] \\
&= [\bar{1}{,}7140\ -]\,d\rho + [\bar{1}{,}5696\ ]\,d\rho_2 + [\bar{4}{,}0111\ -], \\
dz' &= [\bar{2}{,}7525\ ]\,d\rho + [\bar{3}{,}9904\ ]\,d\rho_1 + [5{,}8164\ -] \\
&= [\bar{2}{,}8139\ -]\,d\rho + [\bar{2}{,}7546\ ]\,d\rho_2 + [\bar{5}{,}9292\ ].
\end{aligned}
$$

Il en résulte les trois équations

$$
\begin{aligned}
&[\bar{1}{,}3095]\,d\rho + [\bar{2}{,}6376\ -]\,d\rho_1 + [\bar{1}{,}2863\ -]\,d\rho_2 = [\bar{4}{,}4238\ ], \\
&[0{,}0099]\,d\rho + [\bar{1}{,}5950\ -]\,d\rho_1 + [\bar{1}{,}5696\ -]\,d\rho_2 = [\bar{4}{,}0431\ -], \\
&[\bar{1}{,}0853]\,d\rho + [\bar{3}{,}9904\ ]\,d\rho_1 + [\bar{2}{,}7546\ -]\,d\rho_2 = [\bar{4}{,}1775\ ],
\end{aligned}
$$

d'où l'on tire

$$
d\rho = [\bar{4}{,}4063], \qquad d\rho_1 = [\bar{3}{,}4010], \qquad d\rho_2 = [3{,}2224\ -],
$$

et, par suite,

$$dx = [\bar{5},6346 -],\quad dy = [\bar{4},3964\ ],\quad dz = [\bar{5},5090\ ],$$
$$dx' = [\bar{4},2738\ ],\quad dy' = [\bar{4},9315 -],\quad dz' = [\bar{5},4231 -].$$

L'orbite corrigée est donc définie maintenant par les éléments

$$x = [\bar{1},8616475 -],\quad y = [0,3939292\ ],\quad z = [\bar{1},3172225],$$
$$x' = [\bar{1},7744629 -],\quad y' = [\bar{1},3336239 -],\quad z' = [\bar{1},0165893];$$

par suite,

$$r = [0,4132810],\quad rr' = [\bar{2},9021262 -],\quad V^2 = [\bar{1},6140625],$$

et en se servant des valeurs

$$r\,dr = [\bar{4},8163],\quad d(rr') = [\bar{3},3583 -],\quad \frac{1}{2}d(V^2) = [\bar{5},8405],$$

ainsi que des coefficients F_0, F_1, ..., on trouve

$$df_1 = [\bar{4},1703],\quad dg_1 = [\bar{4},1954 -],\quad df_2 = [\bar{5},7360 -],\quad dg_2 = [\bar{5},8703 -],$$

de sorte que

$$f_1 = [\bar{1},9322258],\quad g_1 = [0,3411212 -],\quad f_2 = [\bar{1},9370630],\quad g_2 = [0,3154879].$$

De plus,

$$\rho_1 = [0,4626813],\quad \rho_2 = [0,4718694],$$

et il est alors facile de s'assurer que les équations telles que

$$\lambda_1 \rho_1 = f_1 x + g_1 x' + X_1,\quad \ldots$$

sont toutes exactement vérifiées, ce qui prouve l'entière correction du calcul si, du moins, les coefficients F_0, F_1, ... sont exacts.

Il reste donc à constater que les valeurs de f_1, g_1, f_2, g_2 que nous venons de donner sont bien celles qui résultent des éléments x, y, z, x', y', z' de la nouvelle orbite et des valeurs τ_1 et τ_2. C'est ce que l'on voit en calculant comme précédemment

$$a = [0,4424624],\quad e = [\bar{2},9072363],$$

$$u = -36^\circ.25'.44'',17,\quad M = -33^\circ.40'.51'',35,$$
$$M_1 = -62.18.42,73,\quad u_1 = -66.33.27,14,$$
$$M_2 = -\ 6.44.53,37,\quad u_2 = -\ 7.20.21,54,$$
$$\varphi_1 = -15.\ 3.51,485,\quad \varphi_2 = 14.32.41,315,$$

$$\omega_1 = [\bar{1},6360424-], \qquad \omega_2 = [\bar{1},6211421\ ],$$
$$f_1 = [\bar{1},9322258\ ], \qquad g_1 = [0,3411212-],$$
$$f_2 = [\bar{1},9370630\ ], \qquad g_2 = [0,3154880\ ].$$

Il est, par suite, impossible de trouver un résultat plus satisfaisant, et l'orbite déterminée par x, y, z, x', y', z' représente parfaitement les observations.

Les calculs précédents montrent avec évidence l'avantage que l'on trouve à choisir x, y, z, x', y', z' comme éléments de l'orbite à la place des éléments proprement dits, puisque quelques-uns de ceux-ci, mal déterminés d'ailleurs, subissent de très fortes variations quand on passe d'une approximation à la suivante.

47. Appliquons encore la même méthode à un exemple très différent, dont nous emprunterons les données, très légèrement modifiées pour la date moyenne, au *Traité* de Th. v. Oppolzer. Il s'agit de la comète I de 1847; les dates des observations sont en temps moyen de Berlin :

$$t = 1847 \text{ février } 44,0,$$
$$t_1 = \text{»} \quad \text{»} \quad 18,0,$$
$$t_2 = \text{»} \quad \text{»} \quad 83,0;$$

les coordonnées sont rapportées à l'écliptique et à l'équinoxe moyens de 1847,0, et l'on a :

$$\alpha = 17°.27'.11'',50, \qquad \delta = 30°.58'.26'',32,$$
$$\alpha_1 = 26.21.16,43, \qquad \delta_1 = 62.44.\ 5,18,$$
$$\alpha_2 = 44.18.54,19, \qquad \delta_2 = 16.35.\ 5,41;$$

pour le Soleil, les latitudes sont nulles, tandis que les longitudes et les rayons vecteurs sont :

$$\odot = 355°.15'.45'',52, \qquad R = [\bar{1},9980025],$$
$$\odot_1 = 329.13.31,05, \qquad R_1 = [\bar{1},9951324],$$
$$\odot_2 = 33.37.41,36, \qquad R_2 = [0,0027526].$$

Par suite,

$$X = [\bar{1},9965163\ ], \qquad X_1 = [\bar{1},9292195\ ], \qquad X_2 = [\bar{1},9232147],$$
$$Y = [\bar{2},9149209-], \qquad Y_1 = [\bar{1},7041169-], \qquad Y_2 = [\bar{1},7461062],$$
$$Z = 0, \qquad Z_1 = 0, \qquad Z_2 = 0;$$

$$\lambda = [\bar{1},9127153],\quad \lambda_1 = [\bar{1},6133091],\quad \lambda_2 = [\bar{1},8361612],$$
$$\mu = [\bar{1},4101991],\quad \mu_1 = [\bar{1},3082794],\quad \mu_2 = [\bar{1},8257766],$$
$$\nu = [\bar{1},7115109],\quad \nu_1 = [\bar{1},9488507],\quad \nu_2 = [\bar{1},4555068].$$

L'orbite provisoire à corriger sera une parabole définie par les éléments suivants :

$$T = 1847 \text{ février } 58,320,\quad q = [\bar{2},6290],$$
$$\vartheta = 21°42',\quad i = 48°39',\quad \omega = 254°20'.$$

On en tire

$$v = -149°20'43'',85,\quad r = [\bar{1},7847016],$$
$$v_1 = -158.45.18,00,\quad r_1 = [0,0977734],$$
$$v_2 = 154.45.59,04,\quad r_2 = [\bar{1},9503778],$$

$$x = [\bar{1},4625386-],\quad x' = [\bar{1},6361392\ ],$$
$$y = [\bar{1},4813499\ ],\quad y' = [0,0477574-],$$
$$z = [\bar{1},6451295\ ],\quad z' = [0,1336160-],$$

et l'on trouve

$$d\lambda = [\bar{5},5397\ ],\quad d\lambda_1 = [\bar{4},1338\ ],\quad d\lambda_2 = [\bar{6},541\ -],$$
$$d\mu = [\bar{5},5901-],\quad d\mu_1 = [\bar{4},0672-],\quad d\mu_2 = [\bar{5},0911\ ],$$
$$d\nu = [\bar{5},5494-],\quad d\nu_1 = [\bar{5},5566-],\quad d\nu_2 = [\bar{5},3077-],$$

$$\rho' = [\bar{1},9336\ ],\quad \rho'_1 = [0,0223\ ],\quad \rho'_2 = [0,2487\ ].$$

On a aussi

$$r' = [0,2424-],\quad \omega_1 = [\bar{1},3901-],\quad \omega_2 = [0,0733],$$
$$f_1 = [\bar{1},9042\ ],\quad f_2 = [0,5566-],$$
$$g_1 = [\bar{1},6309-],\quad g_2 = [0,1881-];$$

puis, pour la date t_1 :

$$F_0 = [0,0421\ ],\quad F_1 = [\bar{2},8900-],\quad F_2 = [\bar{2},0474\ ],$$
$$G_0 = [\bar{2},9453-],\quad G_1 = [\bar{2},0649\ ],\quad G_2 = [\bar{3},3770-];$$

et pour la date t_2 :

$$F_0 = [1,5111],\quad F_1 = [1,0870],\quad F_2 = [\bar{1},8456],$$
$$G_0 = [1,3559],\quad G_1 = [0,9450],\quad G_2 = [0,3742].$$

Les équations de condition deviennent alors :

$$
\begin{aligned}
dx &= [\bar{1},9127]\,d\rho + [\bar{5},4733\quad],\\
dy &= [\bar{1},4102]\,d\rho + [\bar{5},5237-],\\
dz &= [\bar{1},7115]\,d\rho + [\bar{5},4830-],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[\bar{1},6408-]\,dx' + [\bar{2},1174\quad]\,dy' + [\bar{2},2544\quad]\,dz'\\
&= [\bar{1},7883-]\,d\rho + [\bar{1},6133\quad]\,d\rho_1 + [\bar{4},0227\quad],\\
&[\bar{2},1203\quad]\,dx' + [\bar{1},6486-]\,dy' + [\bar{2},3860-]\,dz\\
&= [\bar{1},4129-]\,d\rho + [\bar{1},3083\quad]\,d\rho_1 + [\bar{5},8969-],\\
&[\bar{2},2567\quad]\,dx' + [\bar{2},3854-]\,dy' + [\bar{1},6634-]\,dz'\\
&= [\bar{1},6864-]\,d\rho + [\bar{1},9489\quad]\,d\rho_1 + [\bar{5},0237\quad],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[0,1020-]\,dx' + [\bar{1},9218-]\,dy' + [\bar{1},9992-]\,dz'\\
&= [0,4898\quad]\,d\rho + [\bar{1},8362\quad]\,d\rho_2 + [\bar{5},9524\quad],\\
&[\bar{1},8623\quad]\,dx' + [\bar{1},8372-]\,dy' + [\bar{1},7752\quad]\,dz'\\
&= [0,2799-]\,d\rho + [\bar{1},8258\quad]\,d\rho_2 + [\bar{5},5559-],\\
&[\bar{1},8142\quad]\,dx' + [0,0981\quad]\,dy' + [\bar{1},6932-]\,dz\\
&= [0,0771-]\,d\rho + [\bar{1},4555\quad]\,d\rho_2 + [\bar{5},8743-];
\end{aligned}
$$

en les résolvant comme dans l'exemple précédent, on a

$$
\begin{aligned}
d\rho &= [\bar{4},0934-], & dx &= [\bar{5},8554-], & dx' &= [\bar{4},0159-],\\
d\rho_1 &= [\bar{4},4860-], & dy &= [\bar{5},8148-], & dy' &= [\bar{4},3401\quad],\\
d\rho_2 &= [\bar{4},4190-], & dz &= [\bar{5},9741-], & dz' &= [\bar{4},6250\quad].
\end{aligned}
$$

L'orbite cherchée est donc définie par les nouveaux éléments

$$
\begin{aligned}
x &= [\bar{1},4626459-], & x' &= [\bar{1},6360351\quad],\\
y &= [\bar{1},4812563\quad], & y' &= [0,0476723-],\\
z &= [\bar{1},6450369\quad], & z' &= [0,1334813-],
\end{aligned}
$$

d'où l'on déduit :

$$T = 1847 \text{ février } 58,32162,$$

$$
\begin{aligned}
a &= [2,6812], & q &= [\bar{2},6293095], & e &= [\bar{1},9999614],\\
\Omega &= 21^\circ 41' 51'',56, & i &= 48^\circ 38' 48'',86, & \omega &= 254^\circ 20' 30'',36.
\end{aligned}
$$

Pour vérifier le calcul, on en tire directement

$$v = -149°.20'.30'',77, \qquad r = [\bar{1},7846542],$$
$$v_1 = -158.45.28,59, \qquad r_1 = [0,0976540],$$
$$v_2 = 154.45.54,04, \qquad r_2 = [\bar{1},9502557],$$

et finalement

$$\lambda = [\bar{1},9127153], \qquad \lambda_1 = [\bar{1},6133092], \qquad \lambda_2 = [\bar{1},8361614],$$
$$\mu = [\bar{1},4101992], \qquad \mu_1 = [\bar{1},3082792], \qquad \mu_2 = [\bar{1},8257766],$$
$$\nu = [\bar{1},7115110], \qquad \nu_1 = [\bar{1},9488506], \qquad \nu_2 = [\bar{1},4555053].$$

La petite divergence que l'on constate sur la valeur de ν_2 comparée à la valeur donnée doit être attribuée (si ce n'est pas le résultat d'une erreur de calcul) au fait que les dérivées partielles de f_2 et g_2 sont grandes, de sorte que l'emploi des méthodes différentielles cesse d'être rigoureux. Il est évident, d'ailleurs, que la grande approximation des éléments provisoires donnés aurait permis, dans ce cas, la détermination directe des corrections de ces éléments eux-mêmes, sans toutefois simplifier les calculs.

CHAPITRE IX.

DÉTERMINATION D'UNE ORBITE KÉPLÉRIENNE PAR UN NOMBRE QUELCONQUE D'OBSERVATIONS. MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.

---

48. Nous supposons actuellement qu'il s'agisse de déterminer une orbite képlérienne par un nombre quelconque d'observations, ou, d'une façon plus exacte, les éléments képlériens osculateurs, pour une certaine époque, de la trajectoire réelle d'un astre M dont on possède des observations en nombre quelconque.

Si ces observations étaient rigoureusement exactes, les équations du problème, en nombre supérieur à celui des inconnues, seraient toutes compatibles, et la considération de six d'entre elles, convenablement choisies, suffirait pour fournir la solution, comme nous l'avons vu au Chapitre précédent, en tenant compte toutefois de l'influence des perturbations, que nous apprendrons bientôt à calculer. Mais comme les observations sont nécessairement affectées d'erreurs, le problème consiste, en réalité, à déterminer l'orbite qui correspond le mieux aux observations faites, et les meilleures valeurs que l'on doit adopter pour ses éléments : on doit donc résoudre de la meilleure façon les équations, non compatibles, en nombre supérieur à celui des inconnues, qui déterminent ces éléments. On applique, à cet effet, la méthode des moindres carrés, dont nous allons, un peu plus loin, rappeler sommairement les principes et expliquer l'usage, après avoir indiqué comment l'on forme les équations du problème actuel.

On suppose connue une orbite suffisamment approchée, susceptible de représenter les observations avec une assez grande exactitude. Avec les éléments de cette orbite, on calcule d'abord une éphéméride précise, fournissant les positions vraies de l'astre M, à des époques

rapprochées équidistantes, voisines des dates des observations; et si celles-ci s'étendent sur un espace de temps assez long pour que les perturbations du mouvement de M deviennent sensibles, en cessant d'être notablement inférieures à la limite des erreurs d'observation, il est nécessaire de tenir compte de ces perturbations.

Les positions théoriques tirées de l'éphéméride par interpolation sont ensuite comparées aux positions réellement observées, en tenant compte, bien entendu, de l'aberration et de la parallaxe : la comparaison des ascensions droites fournit des différences $d\alpha$, toujours prises dans le sens *observation moins calcul;* et de même la comparaison des déclinaisons fournit des différences $d\delta$.

Lorsque les observations sont nombreuses, il convient de remplacer plusieurs observations suffisamment rapprochées par une seule autre fictive, dite *lieu normal*, obtenue de la façon suivante. On choisit pour la date de cette observation fictive une date exprimée par un nombre rond (commencement ou milieu de jour), aussi voisine que possible de la moyenne des dates des observations qu'il s'agit de condenser, et l'on applique à la position théorique tirée de l'éphéméride pour cette date les moyennes des corrections $d\alpha$ et $d\delta$ qui correspondent aux observations individuelles. On obtient ainsi une position fictive, toujours la même évidemment si l'on vient à faire varier légèrement les éléments de l'orbite qui sert de base à l'éphéméride, puisque alors les corrections $d\alpha$ et $d\delta$ ne sont altérées que de quantités qui varient d'une façon très sensiblement uniforme, les observations condensées étant par hypothèse rapprochées; et par suite on est fondé à remplacer ces observations par le lieu normal qu'on en a déduit, d'autant plus qu'on élimine encore ainsi partiellement les erreurs d'observation, d'après les principes de la théorie des erreurs.

Les coordonnées du lieu normal sont ensuite rapportées à tel équinoxe moyen que l'on choisira, celui du commencement de l'année courante, ou de l'année décadaire la plus voisine.

Dans certains cas, lorsque les différences $d\alpha$ et $d\delta$ varient d'une façon peu régulière avec le temps, il convient de prendre des précautions plus minutieuses pour la formation des lieux normaux : mais il est impossible d'insister ici sur toutes les petites difficultés que l'on peut rencontrer, et qu'une pratique assidue apprend seule à surmonter. Disons seulement que si la déclinaison δ n'est pas petite,

et varie rapidement, il vaudra mieux, comme l'on sait, remplacer la considération des différences $d\alpha$ par celles des produits $\cos\delta\, d\alpha$; et remarquons encore qu'il conviendra souvent d'attribuer des poids aux différentes observations, d'après les conditions mêmes dans lesquelles elles ont été faites, et par suite d'employer pour la formation d'un lieu normal les moyennes pondérées des dates, comme des $d\alpha$ et $d\delta$.

49. Désignons actuellement par (e) l'ensemble des éléments de l'orbite approchée dont on part, et par (de) les corrections qu'il leur faut apporter pour résoudre le problème posé. Les équations de condition que doivent vérifier les (de) sont obtenues en écrivant que, pour chaque lieu normal de coordonnées α', δ', les coordonnées α, δ qui correspondent aux éléments (e) deviennent

$$\alpha' = \alpha + d\alpha, \qquad \delta' = \delta + d\delta,$$

quand on remplace les (e) par les $(e + de)$. Comme les corrections (de) sont petites par hypothèse (et si l'expérience montrait qu'il en est autrement, il faudrait recommencer le calcul après une première correction), tout revient donc à égaler aux différences $d\alpha$, $d\delta$, les variations différentielles que subissent α et δ quand les (e) prennent eux-mêmes les variations (de). Il conviendra d'ailleurs de prendre comme seconds membres des équations qui correspondent aux ascensions droites, non pas les différences $d\alpha$ elles-mêmes, mais les produits $\cos\delta\, d\alpha$, car l'erreur d'une observation ou d'une position en ascension droite n'est comparable à l'erreur correspondante en déclinaison que si on la multiplie par le cosinus de la déclinaison. Enfin, d'après les éléments d'appréciation dont on dispose, on attribuera, s'il y a lieu, des poids différents aux différentes équations obtenues.

On choisit le plus souvent pour éléments fondamentaux (e), les éléments proprement dits de l'orbite osculatrice à une certaine époque : les premiers membres des équations de condition résultent alors immédiatement des formules développées à la fin du Chapitre V, du type (18) : ce sont des fonctions linéaires et homogènes des corrections (de), et l'on devra exprimer toutes les inconnues en secondes d'arc, comme les quantités $\cos\delta\, d\alpha$ et $d\delta$ elles-mêmes.

Il faut observer avec soin que dans le calcul des coefficients des variations (de), on devra, lorsqu'on tient compte des perturbations, employer les éléments osculateurs pour l'époque correspondante, sans qu'il y ait lieu, d'ailleurs, de chercher une précision plus grande, puisque les corrections (de) sont assez petites pour que les perturbations puissent être regardées comme en étant indépendantes.

Ce sont ces mêmes éléments qu'il faut employer dans le calcul de l'éphéméride, à moins qu'on ne tienne compte des perturbations d'une autre façon, ainsi qu'on le verra plus loin, dans le Chapitre consacré à leur calcul.

Lorsque les observations sont toutes réparties sur un intervalle de temps assez court, ce qui arrive, en particulier, quand il s'agit d'une petite planète observée pendant une seule opposition, il y a plus d'avantage, comme nous l'avons déjà dit, à choisir pour les éléments (e) les coordonnées héliocentriques x_0, y_0, z_0 de M, et leurs dérivées x'_0, y'_0, z'_0, à la date t_0 d'osculation. Ces coordonnées étant rapportées aux mêmes axes que les observations, désignons par x, y, z les coordonnées héliocentriques à une époque quelconque t, et par dx, dy, dz les variations de ces coordonnées quand les éléments (e) reçoivent les corrections (de); les équations de condition s'écrivent

$$-\frac{\sin\alpha}{\rho}dx+\frac{\cos\alpha}{\rho}dy=\cos\delta\,d\alpha,$$

$$-\frac{\sin\delta\cos\alpha}{\rho}dx-\frac{\sin\delta\sin\alpha}{\rho}dy+\frac{\cos\delta}{\rho}dz=d\delta,$$

en désignant toujours par ρ la distance géocentrique.

En faisant

$$x=fx_0+gx'_0,\qquad y=fy_0+gy'_0,\qquad z=fz_0+gz'_0,$$

on a, par exemple,

$$dx=f\,dx_0+g\,dx'_0+x_0\,df+x'_0\,dg,$$

et le calcul de ces quantités se fera comme nous l'avons vu au Chapitre précédent, les notations subissant les très légères modifications nécessaires.

On obtient généralement de notables simplifications dans la formation des équations de condition, et leur résolution par la méthode des moindres carrés, en tenant compte de l'observation suivante.

Imaginons que l'on parte d'une observation complète donnant lieu à deux équations de condition de même poids, dont les seconds membres sont $\cos\delta\, d\alpha$ et $d\delta$. Faisons un changement de coordonnées, de façon à remplacer les quantités α et δ réellement observées par deux autres analogues, α' et δ', définies de la même façon par rapport aux nouveaux axes. Si $d\alpha'$ et $d\delta'$ sont les différences correspondant à $d\alpha$ et $d\delta$, on sait, et il est d'ailleurs évident géométriquement, que l'on a des relations de la forme

$$\begin{aligned} \cos\delta'\, d\alpha' &= \cos S \cos\delta\, d\alpha + \sin S\, d\delta, \\ d\delta' &= -\sin S \cos\delta\, d\alpha + \cos S\, d\delta, \end{aligned}$$

où la signification de l'angle S est la suivante : si, sur une sphère, on marque les pôles P et P' des deux systèmes de coordonnées, et le point M qui correspond à la direction observée, S est l'angle de l'arc MP avec l'arc MP', compté dans le sens direct.

Puisque la somme des carrés des coefficients de $\cos\delta\, d\alpha$ et de $d\delta$ est égale à l'unité dans chacune des formules précédentes, il en résulte, d'après les principes qui vont être rappelés ci-dessous, que l'on peut, sans rien changer à la solution, remplacer les équations de condition qui ont pour seconds membres $\cos\delta\, d\alpha$ et $d\delta$, par celles qui ont pour seconds membres $\cos\delta'\, d\alpha'$ et $d\delta'$, affectées d'ailleurs du même poids que les premières.

Revenons alors sur la formation des équations de condition du problème actuel, et supposons d'abord que l'on ait adopté pour les (e) les éléments proprement dits de l'orbite. Prenons pour axes du nouveau système des coordonnées angulaires α', δ', des axes parallèles aux arêtes du trièdre $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ défini au n° 26, tel que $O\xi_1$ et $O\zeta_1$ soient dirigés respectivement, O étant le Soleil, vers le périhélie et vers le pôle de l'orbite. Dans ces conditions, on voit immédiatement, d'après leur définition même, aussi bien que d'après les formules qui les déterminent, que les constantes désignées dans ce même paragraphe par a', b', c', A', B', C' deviennent, pour notre nouveau système d'axes,

$$a' = \frac{\pi}{2} - \delta', \qquad A' = \frac{\pi}{2} - \alpha',$$

$$b' = \frac{\pi}{2}, \qquad B' = -\alpha',$$

$$c' = -\delta', \qquad C' = \frac{\pi}{2} - \alpha'.$$

Désignons maintenant par dP, dQ, dR les quantités invariantes

$$\cos\omega\, di + \sin i \sin\omega\, d\vartheta, \quad \sin\omega\, di - \sin i \cos\omega\, d\vartheta, \quad d\omega + \cos i\, d\vartheta,$$

qui représentent, comme nous l'avons vu, les projections sur les axes du trièdre $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ de la rotation instantanée de ce trièdre (au signe près pour la seconde), quels que soient les axes de référence pour les éléments ϑ, i, θ. Les formules utiles du type (18) du n° 26 qui donnent nos équations de condition prennent alors la forme plus simple

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{\rho}\operatorname{séc}\varphi[\cos(v-\alpha') + \sin\varphi\cos\alpha'][dM_0 + (t-t_0)\,dn] \\
&\quad - \frac{2}{3}\frac{a}{\rho}\frac{r\sqrt{a}}{k}\sin(v-\alpha')\,dn \\
&\quad + \frac{a}{\rho}[\sin u\cos(v-\alpha') + \cos\varphi\sin\alpha']\,d\varphi \\
&\quad + \frac{r}{\rho}\cos(v-\alpha')\,dR = \cos\delta'\,d\alpha',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{\rho}\operatorname{séc}\varphi\sin\delta'[\sin(v-\alpha') - \sin\varphi\sin\alpha'][dM_0 + (t-t_0)\,dn] \\
&\quad + \frac{2}{3}\frac{a}{\rho}\frac{r\sqrt{a}}{k}\sin\delta'\cos(v-\alpha')\,dn \\
&\quad + \frac{a}{\rho}\sin\delta'[\sin u\sin(v-\alpha') + \cos\varphi\cos\alpha']\,d\varphi \\
&\quad + \frac{r}{\rho}\sin\delta'\sin(v-\alpha')\,dR + \frac{r\sin v}{\rho}\cos\delta'\,dP + \frac{r\cos v}{\rho}\cos\delta'\,dQ = d\delta'.
\end{aligned}$$

On a d'ailleurs, pour déterminer α', δ' et l'angle S qui permet de passer aux quantités $\cos\delta'\,d\alpha'$ et $d\delta'$, les formules générales du changement de coordonnées

$$\begin{aligned}
\cos\delta'\sin(\alpha'+\omega_1) &= \sin i_1\sin\delta + \cos i_1\cos\delta\sin(\alpha-\vartheta_1), \\
\cos\delta'\cos(\alpha'+\omega_1) &= \cos\delta\cos(\alpha-\vartheta_1), \\
\sin\delta' &= \cos i_1\sin\delta - \sin i_1\cos\delta\sin(\alpha-\vartheta_1), \\
\cos\delta'\sin S &= \sin i_1\cos(\alpha-\vartheta_1), \\
\cos\delta'\cos S &= \cos i_1\cos\delta + \sin i_1\sin\delta\sin(\alpha-\vartheta_1),
\end{aligned}$$

les éléments ϑ_1, i_1, ω_1 se rapportant, comme au Chapitre V, à l'équateur.

Dans le cas d'une orbite elliptique à forte excentricité, ou encore parabolique ou hyperbolique, on aura des formules toutes sem-

blables, qui s'écriront immédiatement d'après les développements du Chapitre V.

Les équations précédentes, où dP, dQ, dR doivent remplacer les inconnues $d\Theta$, di, $d\omega$, offrent plusieurs avantages, malgré les calculs que demande la détermination de α' et δ', $\cos\delta'\, d\alpha'$ et $d\delta'$.

Tout d'abord, les coefficients des inconnues sont relativement simples, et dans les équations qui correspondent aux $d\alpha'$, les inconnues dP et dQ ne figurent pas; en second lieu, beaucoup de coefficients sont petits, en général, comme contenant en facteur soit $\sin\varphi$, soit $\sin(v-\alpha')$, soit $\sin\delta'$; et en effet, il est clair, d'après la définition de α' et δ', que l'angle $v-\alpha'$ est petit aux environs de l'opposition de l'astre observé, et que δ' est de l'ordre de l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique. On voit ainsi que les calculs nécessaires pour la formation et la résolution des équations de condition seront sensiblement simplifiés; on pourra même, en observant que les quatre inconnues qui figurent dans les équations en $d\alpha'$ n'ont que de petits coefficients dans celles en $d\delta'$, commencer par résoudre les premières, qui ne contiennent que quatre inconnues, et résoudre ensuite les secondes par rapport à dP et dQ, en y remplaçant les autres inconnues par leurs valeurs déjà déterminées; sans doute on ne se conforme pas rigoureusement à la méthode des moindres carrés en opérant ainsi, mais ce sera sans inconvénient sensible.

Dans le cas où l'on prend pour éléments fondamentaux (e) les coordonnées x_0, y_0, z_0, et leurs dérivées x'_0, y'_0, z'_0 pour l'époque t_0, on pourra choisir comme axes auxquels sont rapportées ces coordonnées, ainsi que α' et δ', des axes parallèles aux arêtes du trièdre $O\xi_0\eta_0\zeta_0$, $O\xi_0$ et $O\zeta_0$ étant dirigés respectivement suivant le rayon vecteur OM_0 et vers le pôle de l'orbite. Dans ces conditions on aura, suivant des notations évidentes,

$$x_0 = r_0, \qquad y_0 = z_0 = 0, \qquad x'_0 = \frac{e\sin v_0}{\sqrt{p}}, \qquad y'_0 = \frac{\sqrt{p}}{r_0}, \qquad z'_0 = 0,$$

et les coordonnées α', δ' sont déterminées par les mêmes équations que ci-dessus, où l'on remplace toutefois ω_1 par $\omega_1 + v_0$. On obtiendra ainsi, dans les équations de condition, d'avantageuses simplifications tout à fait analogues aux précédentes.

Il est facile ensuite, à la fin du calcul, de revenir aux éléments ordinaires de l'orbite.

Les procédés que nous venons de décrire peuvent évidemment être appliqués aussi bien à la solution du problème traité dans le Chapitre précédent, la seule différence avec le problème actuel étant que le nombre des équations est alors égal au nombre des inconnues, de sorte qu'il est inutile de faire apparaître les coordonnées réellement observées, puisque la théorie des erreurs n'intervient pas. On appréciera, dans chaque cas particulier, l'avantage qui en peut résulter.

50. Avant d'aborder l'exposition de la méthode des moindres carrés, rappelons d'abord quelques définitions et quelques principes de la théorie des erreurs d'observation.

La mesure d'une grandeur x par l'observation est affectée d'une erreur ε, égale à la différence $x - a$, en appelant a le résultat de l'observation. Les conditions de l'observation restant toujours les mêmes, et les erreurs étant supposées seulement *fortuites*, mais non *systématiques*, la loi de probabité de ces erreurs est définie par une fonction $\varphi(\varepsilon)$, telle que la probabilité de commettre une erreur comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$, soit égale à $\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon$. La fonction $\varphi(\varepsilon)$ doit être paire, les erreurs égales et de signes contraires présentant des chances égales; elle doit tendre rapidement vers zéro lorsque ε augmente en valeur absolue, car les erreurs très grandes ne se présentent pas en réalité; elle doit nécessairement, d'après sa définition même, vérifier la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon = 1.$$

On adopte la loi de Gauss, vérifiant ces conditions et confirmée par l'expérience, soit

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2m^2}};$$

e désigne la base des logarithmes hyperboliques, et m est une constante positive, qui dépend évidemment de la qualité des observations, d'autant plus petite que leur précision est plus grande. D'une façon plus exacte, si pour une autre série d'observations le paramètre m est remplacé par m', et si α est une quantité positive quelconque, les probabilités de commettre des erreurs inférieures en valeur absolue à αm dans la première série, à $\alpha m'$ dans la seconde série, sont égales. On dit encore, pour des raisons que la suite justifiera, que les obser-

vations des deux séries ont des poids inversement proportionnels à m^2 et m'^2.

On sait que la *valeur probable* d'une quantité est la somme des produits que l'on obtient en multipliant les diverses valeurs que peut prendre cette quantité par leurs probabilités respectives. Il en résulte que la valeur probable du carré ε^2 de l'erreur est égale à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Comme on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2m^2}} d\varepsilon = m\sqrt{2\pi},$$

la différentiation par rapport m donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 e^{-\frac{\varepsilon^2}{2m^2}} d\varepsilon = m^3\sqrt{2\pi},$$

et par suite la valeur cherchée est précisément m^2.

On appelle m l'*erreur moyenne* des observations considérées; c'est donc la racine carrée positive de la valeur probable du carré ε^2 de l'erreur.

On appelle encore *erreur probable* la quantité ρ telle qu'il y ait chance égale pour que l'erreur ε soit inférieure ou supérieure à ρ en valeur absolue; on a donc, pour définir ρ, l'égalité

$$\int_{-\rho}^{+\rho} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{1}{2},$$

ce qui revient à

$$\int_0^{\frac{\rho}{m\sqrt{2}}} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4},$$

de sorte que, d'après les tables de l'intégrale $\int_0^t e^{-t^2}\, dt$, on a

$$\rho = m \times 0,6745.$$

Supposons que l'on ait fait n observations conduisant à des erreurs ε_i, et soit $f(\varepsilon)$ une fonction quelconque de l'erreur ε. Nommons p la valeur probable de $f(\varepsilon)$ et s la moyenne arithmétique des n quantités $f(\varepsilon_i)$; la théorie des probabilités nous apprend encore

que, si p' désigne la valeur probable de la fonction $[f(\varepsilon)]^2$, on obtient pour l'expression de la valeur probable de $(s-p)^2$ le nombre

$$\frac{p'-p^2}{n},$$

de sorte que cette valeur probable tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Comme $(s-p)^2$ est une quantité toujours positive, il faut en conclure que la probabilité pour que la moyenne s diffère de p d'une quantité notable est très petite, et qu'en faisant $p=s$, on s'écarte vraisemblablement très peu de la réalité, si du moins n est suffisamment grand.

En particulier, on a donc, d'une façon d'autant plus approchée que n est plus grand,

$$m^2 = \frac{\sum \varepsilon_i^2}{n}.$$

Si n est petit, cette formule n'est plus qu'approximative, et peut même perdre toute signification réelle.

Le problème de la *composition des erreurs* est le suivant. Soient $x, x', x'', \ldots$ des grandeurs observées directement, et pour lesquelles on trouve des valeurs $a, a', a'', \ldots$, de sorte que les erreurs commises sont respectivement $\varepsilon = x - a$, $\varepsilon' = x' - a'$, $\varepsilon'' = x'' - a''$, ... On envisage une fonction $f(x, x', x'', \ldots)$ des grandeurs $x, x', x'', \ldots$, et l'on prend pour sa valeur la même fonction $f(a, a', a'', \ldots)$ des valeurs observées; on commet ainsi une certaine erreur

$$\alpha = f(x, x', x'', \ldots) - f(a, a', a'', \ldots),$$

et l'on cherche la loi de l'erreur α.

Les erreurs $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ sont supposées assez petites pour qu'on puisse les regarder comme infiniment petites, de sorte qu'on peut écrire

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}\varepsilon + \frac{\partial f}{\partial x'}\varepsilon' + \frac{\partial f}{\partial x''}\varepsilon'' + \ldots,$$

et l'on est ramené à chercher la loi de l'erreur α, fonction linéaire et homogène des erreurs $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ de la forme

$$\alpha = A\varepsilon + A'\varepsilon' + A''\varepsilon'' + \ldots,$$

$A, A', A'', \ldots$ étant des coefficients constants, les erreurs $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \ldots$

étant soumises à la loi de Gauss, et appartenant à des séries d'observations S, S', S'', ... caractérisées par leurs erreurs moyennes m, m', m'', ...

Dans ce qui suit, nous nous bornerons à considérer le cas de trois séries S, S', S'' : le raisonnement, comme le résultat, est général. Pour que l'erreur α soit comprise entre deux limites données α_1 et α_2, on peut supposer que les erreurs commises sur x, x', x'' sont comprises respectivement entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$, ε' et $\varepsilon' + d\varepsilon'$, ε'' et $\varepsilon'' + d\varepsilon''$, à la condition que la somme $A\varepsilon + A'\varepsilon' + A''\varepsilon''$ soit comprise entre α_1 et α_2. La probabilité de ce fait *composé* est égale au produit des probabilités simples de chacun des événements composants, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{mm'm''(\sqrt{2\pi})^3} e^{-\frac{f}{2}} d\varepsilon\, d\varepsilon'\, d\varepsilon'',$$

en désignant par f la forme quadratique définie des variables ε, ε', ε'',

$$\frac{\varepsilon^2}{m^2} + \frac{\varepsilon'^2}{m'^2} + \frac{\varepsilon''^2}{m''^2}.$$

La probabilité totale pour que α soit compris entre α_1 et α_2 est la somme de ces probabilités élémentaires, c'est-à-dire l'intégrale triple

$$J = \frac{1}{mm'm''(\sqrt{2\pi})^3} \int\int\int e^{-\frac{f}{2}} d\varepsilon\, d\varepsilon'\, d\varepsilon''$$

étendue aux valeurs de ε, ε', ε'' qui donnent à la somme $A\varepsilon + A'\varepsilon' + A''\varepsilon''$ une valeur comprise entre α_1 et α_2.

Pour calculer J, faisons une substitution linéaire sur les variables ε, ε', ε''; les nouvelles variables seront α, α', α'', et α sera précisément la somme $A\varepsilon + A'\varepsilon' + A''\varepsilon''$. On aura des formules telles que

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= p\,\alpha + q\,\alpha' + r\,\alpha'',\\
\varepsilon' &= p'\alpha + q'\alpha' + r'\alpha'',\\
\varepsilon'' &= p''\alpha + q''\alpha' + r''\alpha''.
\end{aligned}$$

Supposons de plus que, par cette substitution, la forme f reste une somme F de carrés telle que

$$\frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{\alpha'^2}{M'^2} + \frac{\alpha''^2}{M''^2}.$$

Dans ces conditions, si Δ désigne la valeur absolue du déterminant

des coefficients $p, q, r, \ldots$ de la substitution, on a

$$J = \frac{\Delta}{m m' m'' (\sqrt{2\pi})^3} \int\int\int e^{-\frac{F}{2}} d\alpha\, d\alpha'\, d\alpha'',$$

l'intégrale triple devant être étendue à toutes les valeurs possibles de α' et α'', mais seulement à celles de α comprises entre α_1 et α_2.

D'autre part, la théorie des invariants des formes quadratiques donne la relation

$$m m' m'' = M M' M'' \Delta,$$

et par suite il vient, le calcul de J se réduisant à celui d'intégrales simples évidentes, en raison de la forme de F,

$$J = \frac{1}{M\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{-\frac{\alpha^2}{2M^2}} d\alpha.$$

Écrivons enfin que la forme $f - \frac{\alpha^2}{M^2}$ se réduit à une somme de deux carrés, c'est-à-dire que son discriminant est nul : cela donne immédiatement la relation

$$M^2 = A^2 m^2 + A'^2 m'^2 + A'' m''^2;$$

par suite, l'erreur α suit la loi de Gauss, ce qui est un fait fondamental, et l'erreur moyenne correspondante est le nombre M défini par la relation précédente.

51. Soient p quantités indépendantes $x, y, z, \ldots$ et n fonctions linéaires et homogènes quelconques de ces quantités

$$(1) \qquad f_i \equiv a_i x + b_i y + c_i z + \ldots \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n);$$

on suppose essentiellement $n > p$.

Soit ψ une autre fonction linéaire et homogène quelconque donnée de $x, y, z, \ldots,$

$$(2) \qquad \psi \equiv qx + ry + sz + \ldots.$$

On peut exprimer ψ linéairement à l'aide des f_i d'une infinité de façons; en posant

$$(3) \qquad \psi \equiv \sum \omega_i f_i,$$

où les ω_i sont des constantes, il est nécessaire et suffisant, pour assurer

l'identité, d'avoir les p relations

$$(4)\qquad q=\sum \omega_i a_i,\qquad r=\sum \omega_i b_i,\qquad s=\sum \omega_i c_i,\qquad \ldots$$

Imaginons alors que l'on soumette à l'observation directe les grandeurs f_i; appelons l_i les résultats observés, ε_i les erreurs commises, de sorte que $f_i = l_i + \varepsilon_i$. Si dans les diverses expressions (3) de la fonction ψ on remplace les f_i par leurs valeurs observées l_i, on obtient autant de valeurs approchées pour la véritable valeur de ψ : l'erreur commise est de la forme $\Sigma\omega_i\varepsilon_i$, et composée avec les erreurs ε_i.

Appelons $p_1, p_2, p_3, \ldots$ les poids relatifs des observations qui produisent les erreurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$; les erreurs moyennes m_i correspondantes seront de la forme $\frac{m}{\sqrt{p_i}}$, en appelant m l'erreur moyenne des observations de poids 1. D'après ce qui précède, l'erreur $\Sigma\omega_i\varepsilon_i$ relative à la forme (3) de ψ suit la loi de Gauss, et si μ est l'erreur moyenne correspondante, on a

$$\mu^2 = m^2\sum\frac{\omega_i^2}{p_i},$$

le poids ρ étant $\frac{m^2}{\mu^2}$.

Les ω_i n'étant pas des variables indépendantes, à cause des relations (4), l'expression de μ^2 est évidemment susceptible d'un minimum non nul; il existe donc une détermination de ψ de la forme (3) qui a un poids maximum, ou une erreur moyenne minimum : nous l'appellerons la *détermination* principale de ψ, et nous la désignerons par ψ'.

Pour obtenir cette détermination principale, il convient, comme on sait, d'écrire

$$(5)\qquad \frac{\mu^2}{m^2} = \sum\frac{\omega_i^2}{p_i} + 2\alpha\Big(q - \sum\omega_i a_i\Big) + 2\beta\Big(r - \sum\omega_i b_i\Big) + 2\gamma\Big(s - \sum\omega_i c_i\Big) + \ldots,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ étant p inconnues auxiliaires, et de regarder alors $\frac{\mu^2}{m^2}$ comme une fonction des $n+p$ variables indépendantes $\omega_i, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

En égalant à zéro les dérivées partielles du second membre de l'équation précédente par rapport à ces variables, on a comme condi-

tions du minimum de m, outre les relations (4), les nouvelles équations

$$\frac{\omega_i}{p_i} = \alpha a_i + \beta b_i + \gamma c_i + \ldots \tag{6}$$

Éliminons les ω_i, et suivant la notation habituelle, écrivons d'une façon générale $\Sigma\varphi_i$ sous la forme $[\varphi]$, φ étant quelconque; il vient

$$(7)\quad \begin{cases} [paa]\alpha + [pab]\beta + [pac]\gamma + \ldots = q, \\ [pab]\alpha + [pbb]\beta + [pbc]\gamma + \ldots = r, \\ [pac]\alpha + [pbc]\beta + [pcc]\gamma + \ldots = s, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Soit D le déterminant symétrique (supposé non nul)

$$D = \begin{vmatrix} [paa] & [pab] & [pac] & \ldots \\ [pab] & [pbb] & [pbc] & \ldots \\ [pac] & [pbc] & [pcc] & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

des coefficients des inconnues; appelons aussi (aa), (ab), (ac), ... les quotients par D des coefficients respectifs des éléments $[paa]$, $[pab]$, $[pac]$, ... dans le développement de D suivant les éléments des lignes ou des colonnes; enfin envisageons la forme quadratique et homogène de p variables quelconques u, v, w, ...

$$g = (aa)u^2 + 2(ab)uv + 2(ac)uw + \ldots + (bb)v^2 + 2(bc)vw + \ldots.$$

La simple résolution des équations (7) donne alors immédiatement

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial g(q, r, s, \ldots)}{\partial q}, \qquad \beta = \frac{1}{2}\frac{\partial g(q, r, s, \ldots)}{\partial r}, \qquad \ldots,$$

et par suite, il vient

$$\omega_i = \frac{1}{2} p_i \left[a_i \frac{\partial g(q, r, s, \ldots)}{\partial q} + b_i \frac{\partial g(q, r, s, \ldots)}{\partial r} + \ldots \right],$$

ce qui peut s'écrire encore, comme on sait,

$$\omega_i = \frac{1}{2} p_i \left[q \frac{\partial g(a_i, b_i, c_i, \ldots)}{\partial a_i} + r \frac{\partial g(a_i, b_i, c_i, \ldots)}{\partial b_i} + \ldots \right],$$

d'où enfin, pour la détermination principale de ψ,

$$(8)\qquad \begin{aligned}\psi' = &\quad q\sum \tfrac{1}{2} p_i f_i \frac{\partial g(a_i, b_i, c_i, \ldots)}{\partial a_i} \\ &+ r\sum \tfrac{1}{2} p_i f_i \frac{\partial g(a_i, b_i, c_i, \ldots)}{\partial b_i} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Quant à l'erreur moyenne μ de ψ', elle est déterminée par le minimum de $\frac{\mu^2}{m^2}$, et comme, d'après les propriétés élémentaires des formes quadratiques, on a ici, en vertu des relations (6) et des valeurs de α, β, γ, ...,

$$\frac{\mu^2}{m^2} = \alpha q + \beta r + \gamma s + \ldots = g(q, r, s, \ldots),$$

il vient

$$(9)\qquad \mu = m\sqrt{g(q, r, s, \ldots)};$$

il suffit de rendre homogène, par l'introduction d'une nouvelle variable, la forme quadratique (5) des variables ω_i, α, β, γ, ... et d'appliquer le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, pour arriver à ce résultat.

Si l'on prend en particulier pour ψ les quantités x, y, z, ... elles-mêmes, on aura leurs déterminations principales x', y', z', ... en prenant successivement dans la formule (8) les coefficients mêmes de q, r, s, ..., de sorte que la détermination principale de ψ est construite avec les déterminations principales de x, y, z, ... précisément comme ψ avec x, y, z, ... Quant aux erreurs moyennes de x', y', z', ..., elles résultent de la formule (9) et sont

$$\mu_x = m\sqrt{(aa)},\qquad \mu_y = m\sqrt{(bb)},\qquad \mu_z = m\sqrt{(cc)},\qquad \ldots.$$

Prenons maintenant pour ψ la fonction f_i; sa détermination principale sera de la forme

$$f'_i = \sum \alpha_{ik} f_k,$$

en étendant la sommation à toutes les valeurs 1, 2, ..., n de k, et faisant

$$\alpha_{ik} = \frac{1}{2} p_k \left[a_i \frac{\partial g(a_k, b_k, c_k, \ldots)}{\partial a_k} + b_i \frac{\partial g(a_k, b_k, c_k, \ldots)}{\partial b_k} + \ldots\right],$$

de sorte qu'en particulier

$$\alpha_{ii} = p_i\, g(a_i, b_i, c_i, \ldots).$$

Si ν_i est l'erreur moyenne de f'_i, on a aussi

$$\frac{\nu_i^2}{m^2} = \sum \frac{\alpha_{ik}^2}{p_k} = g(a_i, b_i, c_i, \ldots).$$

Envisageons actuellement la combinaison des f_i

$$k_i \equiv f'_i - f_i;$$

elle est manifestement équivalente à zéro, de sorte que si l'on y remplace les f_i par les résultats d'observation l_i, elle prend une valeur égale et de signe contraire à l'erreur que l'on commet ainsi sur elle, soit

$$\varepsilon_i - \sum \alpha_{ik}\varepsilon_k.$$

On peut donc traiter k_i comme une erreur composée avec les erreurs ε; l'erreur moyenne correspondante μ_i est telle que

$$\frac{\mu_i^2}{m^2} = \frac{1 - 2\alpha_{ii}}{p_i} + \sum \frac{\alpha_{ik}^2}{p_k},$$

c'est-à-dire, d'après ce qui précède,

$$\frac{\mu_i^2}{m^2} = \frac{1}{p_i} - g(a_i, b_i, c_i, \ldots).$$

On en déduit

$$\sum \frac{p_i \mu_i^2}{m^2} = n - \sum p_i\, g(a_i, b_i, c_i, \ldots);$$

mais, d'après la définition de la forme g, on a

$$\sum p_i\, g(a_i, b_i, c_i, \ldots) = (aa)[paa] + 2(ab)[pab] + \ldots;$$

considérons alors le déterminant D comme une fonction de ses éléments $[paa]$, $[pab]$, ...; c'en est une fonction homogène de degré μ, et l'on a de plus

$$(aa) = \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial [paa]}, \qquad 2(ab) = \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial [pab]}, \qquad \ldots;$$

il vient donc, d'après le théorème d'Euler,

$$\sum p_i g(a_i, b_i, c_i, \ldots) = p,$$

et par suite, on a l'importante formule

$$(10) \qquad \sum p_i \mu_i^2 = (n-p)m^2;$$

et comme μ_i^2 n'est autre chose que la valeur probable de k_i^2, on peut dire que la valeur probable de $\Sigma p_i k_i^2$ vaut $(n-p)$ fois le carré de l'erreur moyenne des observations de poids 1.

52. Les considérations que nous venons de développer sont purement théoriques : pour les établir, on ne suppose pas les observations faites, mais au contraire qu'elles sont à faire, et on en laisse les résultats indéterminés. Occupons-nous maintenant de les appliquer à la résolution du problème le plus général de la combinaison des observations.

L'énoncé de ce problème est le suivant : on a $p+q$ inconnues X, Y, Z, ... liées par q relations distinctes rigoureuses

$$\Phi_j(X, Y, Z, \ldots) = 0,$$

et l'on en a observé directement n fonctions $F_i(X, Y, Z, \ldots)$; on suppose $n > p$, de sorte que les inconnues sont déterminées par des équations en nombre surabondant, et incompatibles, puisque les observations sont affectées d'erreur. Quelles sont alors les meilleures valeurs à adopter pour les inconnues? Et sur quelle approximation peut-on compter quand on a adopté ces valeurs?

On connaît toujours, ou bien on peut toujours déterminer des valeurs suffisamment approchées X_0, Y_0, Z_0, ... des inconnues, pour qu'en posant $X - X_0 = x$, $Y - Y_0 = y$, $Z - Z_0 = z$, ... on puisse négliger les quantités du second ordre par rapport aux nouvelles inconnues x, y, z, ... Dans ces conditions, les équations du problème par rapport aux nouvelles inconnues x, y, z, ... deviennent linéaires, et ce sont des fonctions linéaires de ces inconnues qui ont été observées; les équations rigoureuses qui lient entre elles les $p+q$ inconnues permettent d'en éliminer q, et il en reste p qui sont indépendantes, et dont on a observé directement n fonctions linéaires, que l'on peut supposer homogènes.

Appelons, en reprenant les notations du numéro précédent, f_i ces n fonctions, l_i leurs valeurs observées, p_i leurs poids relatifs.

Les équations de condition du problème sont

$$a_i x + b_i y + c_i z + \ldots = l_i. \tag{11}$$

Pour déterminer la valeur d'une fonction donnée ψ des inconnues, et l'erreur moyenne de cette détermination, on est amené à mettre la valeur de ψ sous l'une des formes en nombre infini

$$\psi = \sum \omega_i l_i,$$

qui se déduisent de la formule (3) en remplaçant les f_i par les l_i; il est naturel alors de considérer comme étant la meilleure valeur de ψ, celle qui se déduit de la détermination principale ψ' de cette fonction, quand on y remplace les f_i par les l_i; ce choix, dicté par la propriété de ψ' d'avoir un poids maximum, est celui que l'on adopte. Si nous appelons ψ_0 la valeur ainsi obtenue pour ψ, on a d'après (8)

$$\psi_0 = q \sum \frac{1}{2} p_i l_i \frac{\partial g(a_i, b_i, c_i, \ldots)}{\partial a_i} + r \sum \frac{1}{2} p_i l_i \frac{\partial g(a_i, b_i, c_i, \ldots)}{\partial b_i} + \ldots,$$

et l'erreur moyenne de ψ_0 sera d'après (9)

$$\mu = m \sqrt{g(q, r, s, \ldots)}.$$

En particulier, les meilleures valeurs à adopter pour les inconnues elles-mêmes, soit $x_0, y_0, z_0, \ldots$, sont les coefficients de $q, r, s, \ldots$ dans l'expression précédente de ψ_0, et l'on a

$$\psi_0 = q x_0 + r y_0 + s z_0 + \ldots.$$

Les erreurs moyennes de $x_0, y_0, z_0, \ldots$ sont

$$\mu_x = m \sqrt{(aa)}, \qquad \mu_y = m \sqrt{(bb)}, \qquad \mu_z = m \sqrt{(cc)}, \qquad \ldots.$$

Mais il reste une quantité inconnue à déterminer : c'est m, l'erreur moyenne des observations de poids 1. Pour y arriver, on utilise la proposition énoncée à la fin du numéro précédent; si dans k_i on remplace les f_i par les l_i, on obtient des valeurs

$$k_i = a_i x_0 + b_i y_0 + c_i z_0 + \ldots - l_i,$$

et l'on peut former la somme $\Sigma p_i k_i^2$; en égalant cette somme à sa

valeur probable $(n-p)m^2$, on obtient la détermination de m généralement adoptée

$$m = \sqrt{\frac{\sum p_i k_i^2}{n-p}}; \tag{12}$$

mais, comme nous l'avons déjà vu dans un cas analogue, cette formule n'est nullement rigoureuse; elle ne fournit qu'une approximation d'autant plus grande vraisemblablement que le nombre n des observations sera plus grand.

Revenons aux valeurs x_0, y_0, z_0, ...; on voit, en développant les dérivées partielles de la fonction $g(a_i, b_i, c_i, \ldots)$, que l'on peut écrire

$$\text{(13)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 = (aa)[pal] + (ab)[pbl] + (ac)[pcl] + \ldots, \\ y_0 = (ab)[pal] + (bb)[pbl] + (bc)[pcl] + \ldots, \\ z_0 = (ac)[pal] + (bc)[pbl] + (cc)[pcl] + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

et l'on reconnaît là les solutions d'un système analogue à (7)

$$\text{(14)} \quad \left\{ \begin{array}{l} [paa]x + [pab]y + [pac]z + \ldots = [pal], \\ [pab]x + [pbb]y + [pbc]z + \ldots = [pbl], \\ [pac]x + [pbc]y + [pcc]z + \ldots = [pcl], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

Ceci posé, donnons aux inconnues des valeurs quelconques $x, y, z, \ldots$; elles ne vérifient pas les équations du problème, de sorte que si l'on calcule les quantités $a_i x + b_i y + c_i z + \ldots - l_i$, on trouve des valeurs non nulles; ce sont les *résidus* relatifs au choix fait de $x, y, z, \ldots$, pour les diverses observations l_i.

Considérons la somme

$$S = \sum p_i (a_i x + b_i y + c_i z + \ldots - l_i)^2,$$

que l'on obtient en additionnant les produits des carrés des résidus par les poids des observations correspondantes; la somme S est évidemment susceptible d'un minimum, que l'on détermine en égalant à zéro les dérivées partielles de S par rapport à $x, y, z, \ldots$, ce qui conduit précisément aux équations (14). Donc, les meilleures valeurs à adopter pour $x, y, z, \ldots$ sont précisément celles qui

rendent minimum la somme S; d'où le nom de *méthode des moindres carrés*, donné à ce procédé de détermination des inconnues.

Les résidus qui correspondent au choix de x_0, y_0, z_0, ..., pour $x, y, z, \ldots$, sont précisément les valeurs k_i considérées plus haut; la somme $\Sigma p_i k_i^2$ est donc le minimum S_0 de la somme S; au lieu de calculer cette somme directement, on peut encore écrire, en remarquant que S est une forme quadratique non homogène de $x, y, z, \ldots$, et appliquant des principes déjà rappelés,

$$S_0 = -\sum p_i l_i k_i = -[plk];$$

remplaçant les k_i, puis x_0, y_0, z_0, ... successivement par leurs valeurs, ceci devient

$$\begin{aligned}(15)\qquad S_0 &= [pll] - x_0[pal] - y_0[pbl] - z_0[pcl] - \ldots \\ &= [pll] - g([pal], [pbl], [pcl], \ldots).\end{aligned}$$

Appelons alors Δ le déterminant que l'on obtient en bordant le déterminant D comme l'indique le symbole

$$\Delta = \left|\begin{array}{cccc|c} & & & & [pal] \\ & \mathrm{D} & & & [pbl] \\ & & & & [pcl] \\ & & & & \vdots \\ \hline [pal] & [pbl] & [pcl] & \ldots & [pll] \end{array}\right|;$$

on peut écrire finalement

$$(16)\qquad S_0 = [pkk] = -[plk] = \frac{\Delta}{\mathrm{D}}.$$

En résumant, pour avoir les éléments de la solution complète du problème, il faut : 1° résoudre les équations (14), dites équations *normales*, par opposition aux équations de condition (11); 2° déterminer les coefficients (aa), (bb), ... qui correspondent aux éléments $[paa]$, $[pbb]$, ... du déterminant D, afin d'obtenir les erreurs moyennes des inconnues; et si, plus généralement, on veut avoir l'erreur moyenne d'une fonction quelconque ψ, il faut calculer aussi les autres coefficients (ab), (ac), (bc), ... de la forme g; 3° il faut enfin, pour avoir m par la formule (12), déterminer la somme S_0 par la triple formule (16), ou encore par la double formule (15), de façon à obtenir une vérification générale du calcul.

53. Il nous reste à expliquer comment on dirige le calcul. Mais auparavant, examinons le cas particulièrement simple d'une seule inconnue x. L'observation fournit les n équations de condition

$$a_i x = l_i,$$

de poids respectifs p_i; d'où la seule équation normale

$$[paa]x = [pal],$$

et

$$x = \frac{[pal]}{[paa]}.$$

On a de plus

$$S_0 = [pll] - \frac{[pal]^2}{[paa]}, \qquad m = \sqrt{\frac{S_0}{n-1}}, \qquad \mu_x = \frac{m}{\sqrt{[paa]}}.$$

Si en particulier les a_i sont tous égaux à l'unité, de sorte que l'on a observé directement la grandeur x, on a simplement

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \ldots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}, \qquad \mu_x = \frac{m}{\sqrt{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}}.$$

L'expression de *poids* est ainsi justifiée par la forme de la valeur de x, que l'on appelle aussi *moyenne pondérée* des l_i.

Plus particulièrement encore, si les poids sont tous égaux à l'unité, la valeur de x est la moyenne arithmétique des l_i, et l'erreur moyenne correspondante est $\frac{m}{\sqrt{n}}$, la valeur de m étant $\sqrt{\frac{S_0}{n-1}}$. On voit par là, et ce fait est général, ainsi qu'on le vérifie immédiatement sur la forme des équations normales, qu'une observation de poids p peut être regardée comme équivalente à p observations de poids 1; et cette remarque trouve son application quand il s'agit d'attribuer des poids à diverses observations. D'autre part, on voit encore que si, dans le problème général, on a observé plusieurs fois la même fonction des inconnues, on peut remplacer les équations qui en résultent par une seule, en prenant pour résultat de l'observation fictive correspondante la moyenne pondérée des résultats des observations primitives, et en lui donnant pour poids la somme des poids primitifs; dans ces conditions, en effet, les équations normales ne sont pas altérées : c'est en somme ce principe que nous avons appliqué précédemment à la formation des lieux normaux. On doit toutefois observer qu'en opérant ainsi, le dernier élément $[pll]$ du déterminant Δ se

trouve modifié, et par suite la détermination de l'erreur moyenne m est changée : ceci n'a rien de surprenant, d'après la façon même dont cette détermination a été obtenue, et, si le nombre des observations est assez grand, le changement sera vraisemblablement petit.

Revenons maintenant au cas général. Afin de rendre les calculs plus simples et plus réguliers, on observera les règles suivantes. En premier lieu, on voit qu'on ne change rien quand on multiplie les deux membres de l'une des équations de condition primitives par un facteur λ, à la condition expresse de diviser en même temps son poids par λ^2 : on ramène alors tous les poids à l'unité, en multipliant les deux membres de chaque équation par la racine carrée de son poids.

En second lieu, on observe que l'on peut multiplier les deux membres de toutes les équations de condition par un seul et même nombre λ; la quantité m se trouvera aussi multipliée par λ, mais tout le reste subsistera. Désignons alors par A la plus grande des valeurs absolues des coefficients a_i, et déterminons de même B, C, ..., L pour les b_i, c_i, ..., l_i. On remplace les inconnues x, y, z, ... par d'autres x', y', z', ... telles que

$$x = x'\frac{L}{A}, \qquad y = y'\frac{L}{B}, \qquad z = z'\frac{L}{C}, \qquad \ldots,$$

et en même temps on divise tous les coefficients des équations de condition par L, de facon qu'elles deviennent

$$\frac{a_i}{A}x' + \frac{b_i}{B}y' + \frac{c_i}{C}z' + \ldots = \frac{l_i}{L};$$

on réalise ainsi l'avantage suivant : les coefficients des équations ne dépassent pas l'unité en valeur absolue, et les coefficients des différentes inconnues, comme les termes constants, sont des nombres comparables, puisque, dans chacune de ces séries, il y a un coefficient égal à l'unité en valeur absolue. Si ces nouvelles équations conduisent aux valeurs m', $\mu_{x'}$, $\mu_{y'}$, ..., pour l'erreur moyenne des observations de poids 1, et pour les erreurs moyennes de x', y', z', ..., on aura, en revenant aux équations et inconnues primitives,

$$m = m'L, \qquad \mu_x = \mu_{x'}\frac{L}{A}, \qquad \mu_y = \mu_{y'}\frac{L}{B}, \qquad \mu_z = \mu_{z'}\frac{L}{C}, \qquad \ldots$$

Les équations de condition ainsi préparées, on forme les équations

normales, qui, en supposant $p=4$ par exemple, et revenant aux notations primitives, s'écrivent :

$$\begin{aligned}
[aa]x+[ab]y+[ac]z+[ad]t&=[al],\\
[ab]x+[bb]y+[bc]z+[bd]t&=[bl],\\
[ac]x+[bc]y+[cc]z+[cd]t&=[cl],\\
[ad]x+[bd]y+[cd]z+[dd]t&=[dl].
\end{aligned}$$

Pour calculer les différents coefficients de ces équations, le mieux sera de faire usage d'une table de carrés, et d'observer que l'on a

$$ab=\frac{1}{2}[(a+b)^2-a^2-b^2].$$

Il faut aussi calculer $[ll]$, dernier élément du déterminant Δ.

On aura soin de vérifier les calculs de la façon suivante par exemple. Si l'on fait

$$s_i=a_i+b_i+c_i+d_i+l_i,$$

on a

$$[aa]+[ab]+[ac]+[ad]+[al]=[as],$$

et les relations analogues.

Pour résoudre les équations normales, on procède généralement par éliminations successives ; mais on peut aussi bien appliquer directement les formules de la théorie des équations linéaires, lorsque n est égal à 2 ou à 3. La première équation, résolue par rapport à l'inconnue correspondante x, donne

$$x=\frac{[al]}{[aa]}-\frac{[ab]}{[aa]}y-\frac{[ac]}{[aa]}z-\frac{[ad]}{[aa]}t;$$

portons cette valeur telle quelle, et sans faire aucune réduction, dans les trois dernières équations ; on a le nouveau système analogue au premier :

$$\begin{aligned}
[bb.1]y+[bc.1]z+[bd.1]t&=[bl.1],\\
[bc.1]y+[cc.1]z+[cd.1]t&=[cl.1],\\
[bd.1]y+[cd.1]z+[dd.1]t&=[dl.1];
\end{aligned}$$

il suffit de poser, en désignant par g et h deux quelconques des lettres b, c, d, l,

$$[gh.1]=[gh]-\frac{[ag][ah]}{[aa]}.$$

On a d'ailleurs des vérifications telles que

$$[bb.1] + [bc.1] + [bd.1] + [bl.1] = [bs.1],$$

en calculant $[bs.1]$ de la même façon.

Si l'on appelle D_1 et Δ_1 les déterminants analogues à D et Δ relatifs à ce nouveau système, le dernier élément de Δ_1 étant $[ll.1]$, on a, d'après les propriétés élémentaires des déterminants,

$$D = [aa] D_1, \qquad \Delta = [aa] \Delta_1,$$

et, par suite,

$$\frac{\Delta}{D} = \frac{\Delta_1}{D_1}.$$

Il est intéressant encore d'observer que les nouveaux coefficients sont constitués de la même façon que les anciens, puisque

$$[aa][bb.1] = \sum (a_i b_j - a_j b_i)^2,$$
$$[aa][bc.1] = \sum (a_i b_j - a_j b_i)(a_i c_j - a_j c_i),$$

en étendant les sommations aux diverses combinaisons des indices i et j.

Continuant de la même façon, on a

$$y = \frac{[bl.1]}{[bb.1]} - \frac{[bc.1]}{[bb.1]} z - \frac{[bd.1]}{[bb.1]} t,$$

avec le nouveau système

$$[cc.2] z + [cd.2] t = [cl.2],$$
$$[cd.2] z + [dd.2] t = [dl.2],$$

où

$$[gh.2] = [gh.1] - \frac{[bg.1][bh.1]}{[bb.1]};$$

on a les vérifications telles que

$$[cc.2] + [cd.2] + [cl.2] = [cs.2],$$

et toujours

$$\frac{\Delta}{D} = \frac{\Delta_2}{\Delta_2}.$$

Continuant encore de même, on a enfin

$$z = \frac{[cl.2]}{[cc.2]} - \frac{[cd.2]}{[cc.2]} t,$$

avec l'équation unique

$$[dd.3]t = [dl.3],$$

et les vérifications telles que

$$[dd.3] + [dl.3] = [ds.3],$$

en posant

$$[gh.3] = [gh.2] - \frac{[cg.2][ch.2]}{[cc.2]}.$$

On a aussi

$$\frac{\Delta}{D} = \frac{\Delta_3}{D_3} = [ll.4] = [ls.4] = [ss.4],$$

en faisant toujours

$$[gh.4] = [gh.3] - \frac{[dg.3][dh.3]}{[dd.3]},$$

et appliquant le même principe de vérification.

Si l'on a simplement en vue la détermination des inconnues x, y, z, t, on a successivement leurs valeurs par les équations

$$t = \frac{[dl.3]}{[dd.3]},$$

$$z = \frac{[cl.2]}{[cc.2]} - \frac{[cd.2]}{[cc.2]}t,$$

$$y = \frac{[bl.1]}{[bb.1]} - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}z - \frac{[bd.1]}{[bb.1]}t,$$

$$x = \frac{[al]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \frac{[ad]}{[aa]}t,$$

et il est inutile de calculer les coefficients $[ll]$, $[ll.1]$, ...

Mais si l'on veut déterminer les erreurs moyennes des inconnues, il faut d'abord calculer

$$m = \sqrt{\frac{S_0}{n-4}},$$

la valeur de S_0 étant celle de $\frac{\Delta}{D}$, c'est-à-dire $[ll.4]$, ou $[ls.4]$, ou $[ss.4]$.

Mais bien souvent, comme on le voit sur l'exemple développé plus loin, cette façon de déterminer S_0 est pratiquement illusoire. Il faut calculer directement les résidus

$$k_i = l_i - a_i x - b_i y - c_i z - d_i t,$$

pris ici dans le sens observation moins calcul, les x, y, z, t, ayant les valeurs ci-dessus; on a alors, comme nous l'avons vu,

$$S_0 = [kk] = [lk] = [ll] - x[al] - y[bl] - z[cl] - t[dl],$$

et seule la formule $S_0 = [kk]$ présentera d'habitude une précision satisfaisante.

Il faut enfin calculer les coefficients que nous avons appelés (aa), (ab), ... Or, d'après leur signification même et les propriétés élémentaires des déterminants, on voit que (aa), (ab), (ac), (ad) sont précisément les solutions des équations normales, lorsqu'on y fait

$$[al] = 1, \qquad [bl] = [cl] = [dl] = 0.$$

On pourra donc les calculer comme x, y, z, t, à la condition de remplacer dans les formules précédentes les coefficients $[bl.1]$, $[cl.2]$, $[dl.3]$ par les valeurs qui résultent de cette hypothèse.

De même (ab), (bb), (bc), (bd) correspondent à l'hypothèse $[bl] = 1$, $[al] = [cl] = [dl] = 0$; et ainsi de suite. Le calcul se simplifie à mesure que l'on avance; finalement quand on fait $[dl] = 1$, avec $[al] = [bl] = [cl] = 0$, on a aussi $[bl.1] = [cl.2] = 0$, et $[dl.3] = 1$, de sorte que $(dd) = \frac{1}{[dd.3]}$, et que le calcul successif de (cd), (bd), (ad) est immédiat; il est d'ailleurs inutile en principe, mais fournit une bonne vérification, puisque ces coefficients sont ainsi obtenus deux fois.

Finalement, on a pour les erreurs moyennes des inconnues

$$\mu_x = m\sqrt{(aa)}, \qquad \mu_y = m\sqrt{(bb)}, \qquad \mu_z = m\sqrt{(cc)}, \qquad \mu_t = m\sqrt{(dd)},$$

et l'on peut écrire encore, si l'on veut,

$$S_0 = [ll] - (aa)[al]^2 - \ldots - 2(ab)(ac)[al][bl] - \ldots.$$

Dans certains cas, on peut rencontrer des difficultés, lorsqu'il est impossible pratiquement de continuer l'élimination des inconnues en raison de la trop grande petitesse des coefficients que l'on serait amené à prendre comme dénominateurs. S'il en est ainsi, c'est que le déterminant D a une valeur numérique très petite; s'il n'en est pas de même de tous ses premiers mineurs principaux, par exemple de celui qui correspond à x, y, z dans le cas que nous venons d'étudier, on

pourra sans difficulté exprimer ces inconnues à l'aide de t, en les éliminant successivement, comme nous avons fait, mais on ne pourra pas déterminer t. On essaiera cependant d'y arriver de la façon suivante, qui n'a qu'une valeur pratique; mettant dans les équations de condition les valeurs de x, y, z en fonction de t, on aura de nouvelles équations à une seule inconnue, auxquelles on appliquera la méthode des moindres carrés pour avoir une valeur vraisemblable de t. De même, si tous les premiers mineurs principaux de D étaient très petits, mais qu'il n'en fût pas de même du second mineur principal relatif à x et y par exemple, on pourrait exprimer x et y en fonction de z et t, et reporter ces expressions dans les équations de condition, qui ne contiendraient plus que deux inconnues.

Pour appliquer les règles qui précèdent à un exemple, choisissons celui de Gauss, qui donne les quatre équations de même poids à trois inconnues :

$$\begin{aligned} X - Y + 2Z &= 3, \\ 3X + 2Y - 5Z &= 5, \\ 4X + Y + 4Z &= 21, \\ -X + 3Y + 3Z &= 14, \end{aligned}$$

et malgré la simplicité actuelle de la question, appliquons les règles, sans chercher autre chose.

On pose

$$X = \frac{21}{4}x = 5,25x,$$

$$Y = \frac{21}{3}y = 7y,$$

$$Z = \frac{21}{5}z = 4,2z,$$

et les équations deviennent après division par 21

$$\begin{aligned} 0,25x - 0,3333y + 0,4z &= 0,1429, \\ 0,75x + 0,6667y - 1,0z &= 0,2381, \\ 1,00x + 0,3333y + 0,8z &= 1,0000, \\ -0,25x + 1,0000y + 0,6z &= 0,6667, \end{aligned}$$

en se bornant à la précision de quatre décimales.

On a par suite successivement

$$[aa]=1,6875,\quad [ab]=0,5000,\quad [ac]=0,0000,\quad [al]=1,0476,\quad [as]=3,2351,$$
$$[bb]=1,6667,\quad [bc]=0,0666,\quad [bl]=1,1111,\quad [bs]=3,3444,$$
$$[cc]=2,1600,\quad [cl]=1,0191,\quad [cs]=3,2457,$$
$$[ll]=1,5215,\quad [ls]=4,6993,$$
$$[ss]=14,5245,$$

ou, en prenant les logarithmes,

$$[aa]=[0,2272],\quad [ab]=[\bar{1},6990],\quad [ac]=0,\quad [al]=[0,0202],\quad [as]=[0,5099],$$
$$[bb]=[0,2219],\quad [bc]=[\bar{2},8235],\quad [bl]=[0,0457],\quad [bs]=[0,5243],$$
$$[cc]=[0.3345],\quad [cl]=[0,0082],\quad [cs]=[0,5113],$$
$$[ll]=[0,1823],\quad [ls]=[0,6720],$$
$$[ss]=[\bar{1},1621];$$

puis

$$[bb.1]=[0,1815],\quad [bc.1]=[\bar{2},8235],\quad [bl.1]=[\bar{1},9034],\quad [bs.1]=[0,3776],$$
$$[cc.1]=[0,3345],\quad [cl.1]=[0,0082],\quad [cs.1]=[0,5113],$$
$$[ll.1]=[\bar{1},9401],\quad [ls.1]=[0,4298],$$
$$[ss.1]=[0,9202],$$

$$[cc.2]=[0,3339],\quad [cl.2]=[\bar{1},9930],\quad [cs.2]=[0,4971],$$
$$[ll.2]=[\bar{1},6524],\quad [ls.2]=[0,1562],$$
$$[ss.2]=[0,6603],$$

$$[ll.3]=0,\quad [ls.3]=0,$$
$$[ss.3]=0,$$

avec les équations

$$z=[cl.2][\bar{1},6661],$$
$$y=[bl.1][\bar{1},8185]+z[\bar{2},6420-],$$
$$x=[al\ \ ][\bar{1},7728]+y[\bar{1},4718-],$$

qui donnent

$$x=[\bar{1},6726],\qquad y=[\bar{1},7051],\qquad z=[\bar{1},6591],$$

et par suite

$$X=2,471,\qquad Y=3,550,\qquad Z=1,916.$$

En faisant dans ces mêmes équations

$$[al]=1,\qquad [bl]=0,\qquad [cl]=0,$$

d'où

$$[bl.1]=[\bar{1},4718-],\qquad [cl.1]=0,\qquad [cl.2]=[\bar{2},1138],$$

on a

$$(aa) = [\bar{1},8133], \quad (ab) = [\bar{1},2909-], \quad (ac) = [\bar{3},7799];$$

en faisant encore

$$[al] = 0, \quad [bl] = 1, \quad [cl] = 0,$$

d'où

$$[bl.1] = 1, \quad [cl.1] = 0, \quad [cl.2] = [\bar{2},6420-],$$

il vient

$$(ab) = [\bar{1},2909-], \quad (bb) = [\bar{1},8191], \quad (bc) = [\bar{2},3081-];$$

faisant enfin

$$[al] = 0, \quad [bl] = 0, \quad [cl] = 1,$$

d'où

$$[bl.1] = 0, \quad [cl.1] = 1, \quad [cl.2] = 1,$$

on a

$$(ac) = [\bar{3},7799], \quad (bc) = [\bar{2},3081-], \quad (cc) = [\bar{1},6661].$$

Les résidus sont alors

$$k_1 = 0,0118, \quad k_2 = 0,0032, \quad k_3 = -0,0044, \quad k_4 = 0,0035,$$

de sorte que

$$S_0 = [kk] = 0,000\,180, \quad m = 0,0134,$$

et finalement, les erreurs moyennes sur X, Y, Z sont (si l'on regarde les formules qui les donnent comme ayant quelque valeur réelle)

$$\mu_X = 0,057, \quad \mu_Y = 0,076, \quad \mu_Z = 0,038.$$

CHAPITRE X.

THÉORIE DE L'INTERPOLATION.

54. Pour achever l'étude qui fait l'objet du présent Livre II, il nous reste encore à montrer comment l'on peut déterminer numériquement les perturbations du mouvement képlérien. Mais, auparavant, il est indispensable de rappeler quelques points essentiels de la théorie générale de l'interpolation, en nous bornant, bien entendu, aux développements strictement nécessaires en vue de l'usage ultérieur.

D'une façon générale, on peut définir ainsi l'objet de l'interpolation; si l'on envisage une fonction f, qui ne peut être connue que par l'observation d'un certain nombre de ses valeurs, ou bien encore qui est d'une forme analytique déterminée, mais trop compliquée pour être utilisée pratiquement, il y a lieu de remplacer cette fonction par une autre φ, construite suivant certaines règles, d'une façon partiellement arbitraire, et se prêtant aisément au calcul. En faisant cette substitution dans les diverses opérations que l'on doit effectuer sur f, on commet une erreur : le choix de la fonction d'interpolation φ doit être tel que cette erreur n'entache pas les résultats, au degré d'approximation que l'on veut obtenir. C'est là une question qu'on ne peut généralement résoudre avec une parfaite rigueur, à moins qu'il ne s'agisse de fonctions f particulièrement simples; on ne peut en réalité que procéder par inductions, fondées, il est vrai, sur l'expérience, et il appartient à la sagacité du calculateur d'apprécier dans chaque cas particulier la légitimité de ces inductions.

Considérons d'abord le problème de l'interpolation *parabolique*. Soit $y=f(x)$ une fonction de la variable indépendante x, développable par la formule de Taylor, suivant les puissances entières et positives de $x-a$, ou plus simplement de x, ainsi qu'on peut tou-

jours le supposer, sous la forme

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots;$$

ce développement est supposé valable à l'intérieur d'un certain domaine D qui contiendra toutes les valeurs de x que nous devons considérer. Nous supposons de plus qu'il est pratiquement utilisable pour le calcul, de sorte que les termes successifs décroissent d'une façon suffisamment marquée, pour toutes les valeurs de x appartenant à D.

Suivant les notations habituelles, on a

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n},$$

et ce coefficient peut être appelé la *variation* d'ordre n de y, pour $x = 0$.

Supposons connues les valeurs $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ que prend la fonction y pour certaines valeurs distinctes $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la variable x, en nombre $n+1$. On peut alors déterminer les $n+1$ coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ en fonction de ces données et des coefficients suivants $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$; si l'on néglige ensuite ces derniers coefficients, on aura pour y une expression approchée, sous la forme d'un polynome $\varphi(x)$ de degré n, prenant les mêmes valeurs que $f(x)$ pour $x = x_0, x_1, \ldots, x_n$; en substituant ce polynome à $f(x)$, on aura pour calculer cette fonction une formule d'interpolation dont l'erreur est évidemment une fonction linéaire et homogène de $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$, et peut être sinon évaluée, du moins appréciée, quand les hypothèses faites ci-dessus sont vérifiées.

Voici comment on peut diriger le calcul que nous venons d'indiquer. Nous nous servirons des notations suivantes : soient $a, b, c, d, \ldots$ des valeurs quelconques de x, et A, B, C, D, ... les valeurs correspondantes de y; faisons

$$(AB) = \frac{A - B}{a - b}, \qquad (BC) = \frac{B - C}{b - c}, \qquad \ldots,$$

$$(ABC) = \frac{(AB) - (BC)}{a - c}, \qquad (BCD) = \frac{(BC) - (CD)}{b - d}, \qquad \ldots,$$

$$(ABCD) = \frac{(ABC) - (BCD)}{a - d}, \qquad \ldots,$$

de sorte que le calcul successif de ces diverses quantités se présente de la façon la plus simple.

On vérifie immédiatement que l'on peut écrire

$$(AB) = \frac{A}{a-b} + \frac{B}{b-a},$$

$$(ABC) = \frac{A}{(a-b)(a-c)} + \frac{B}{(b-a)(b-c)} + \frac{C}{(c-a)(c-b)},$$

$$(ABCD) = \frac{A}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{B}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{C}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{D}{(d-a)(d-b)(d-c)},$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

de sorte que, dans ces expressions, on peut, en raison de la symétrie mise en évidence, permuter arbitrairement les lettres A, B, C, ... qui y figurent.

Nous conviendrons encore de désigner par $S_p(a, b, c, \dots)$ la somme des combinaisons complètes p à p des lettres $a, b, c, \dots$, de sorte que, par exemple,

$$S_1(a, b, c) = a + b + c,$$

$$S_2(a, b, c) = a^2 + ab + ac + b^2 + bc + c^2,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Écrivons alors les $n+2$ équations

$$y_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + \dots,$$

$$y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \dots,$$

$$y_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 + \dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$y_n = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + a_3 x_n^3 + \dots,$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots;$$

tout revient à éliminer $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ entre ces équations. On y arrive aisément de la façon suivante : en retranchant la première de chacune des autres, on élimine a_0, et en divisant les résultats par $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x - x_0$, on a les nouvelles relations

$$(y_0 y_1) = a_1 + a_2 S_1(x_0, x_1) + a_3 S_2(x_0, x_1) + \dots,$$

$$(y_0 y_2) = a_1 + a_2 S_1(x_0, x_2) + a_3 S_2(x_0, x_2) + \dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$(y_0 y_n) = a_1 + a_2 S_1(x_0, x_n) + a_3 S_2(x_0, x_n) + \dots,$$

$$(y\ y_0) = a_1 + a_2 S_1(x, x_0) + a_3 S_2(x, x_0) + \dots.$$

En procédant exactement de la même façon pour éliminer a_1, on obtient

$$(y_0\, y_1\, y_2) = a_2 + a_3\, S_1(x_0, x_1, x_2) + a_4\, S_2(x_0, x_1, x_2) + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(y_0\, y_1\, y_n) = a_2 + a_3\, S_1(x_0, x_1, x_n) + a_4\, S_2(x_0, x_1, x_n) + \ldots,$$
$$(y\;\; y_0\, y_1) = a_2 + a_3\, S_1(x, \;\; x_0, x_1) + a_4\, S_2(x, \;\; x_0, x_1) + \ldots.$$

Continuant encore de même, on obtient finalement, comme résultat de l'élimination, la relation

$$\begin{aligned}(y\, y_0\, y_1 \ldots y_n) = a_{n+1} &+ a_{n+2}\, S_1(x, x_0, x_1, \ldots, x_n)\\ &+ a_{n+3}\, S_2(x, x_0, x_1, \ldots, x_n)\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

D'autre part, on a les identités

$$\begin{aligned}(x - x_n\;\;)(y y_0 y_1 \ldots y_n\;\;) &= (y y_0 y_1 \ldots y_{n-1}) - (y_0 y_1 \ldots y_n\;\;),\\ (x - x_{n-1})(y y_0 y_1 \ldots y_{n-1}) &= (y y_0 y_1 \ldots y_{n-2}) - (y_0 y_1 \ldots y_{n-1}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ (x - x_1)\;\;(y y_0 y_1) &= (y y_0) \qquad - (y_0 y_1),\\ (x - x_0)\;\;(y y_0) &= y \qquad\quad - y_0,\end{aligned}$$

et l'on en tire, en tenant compte de la valeur ci-dessus de $(y y_0 y_1 \ldots y_n)$,

$$\begin{aligned}y = y_0 + (x - x_0)(y_0 y_1) &+ (x - x_0)(x - x_1)(y_0 y_1 y_2)\\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(y_0 y_1 y_2 y_3)\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})(y_0 y_1 y_2 \ldots y_n)\\ + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)\,[a_{n+1} &+ a_{n+2}\, S_1(x, x_0, x_1, \ldots, x_n)\\ &+ a_{n+3}\, S_2(x, x_0, x_1, \ldots, x_n)\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]\end{aligned}$$

La question posée est ainsi complètement résolue; le polynome d'interpolation $\varphi(x)$ est celui que l'on obtient en laissant de côté les termes en a_{n+1}, a_{n+2}, ...; l'erreur sur y est représentée par l'ensemble de ces termes.

Les coefficients a_0, a_1, a_2, ... sont ceux que fournit le développement immédiat de $\varphi(x)$ suivant les puissances de x, et l'erreur de

chacun d'eux est en évidence; celle de a_n, par exemple, est de la forme

$$-a_{n+1}(x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + \ldots,$$

et l'on voit qu'elle est diminuée notablement si les valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont choisies de façon que leur somme soit nulle.

On peut juger de la valeur du résultat par la façon plus ou moins satisfaisante dont décroissent les termes tels que $a_i x^i$, ou plutôt les termes successifs dont se compose $\varphi(x)$ pris sous la forme précédente $y_0 + (x - x_0)(y_0 y_1) + \ldots$, quand x reçoit les valeurs pour lesquelles on veut interpoler. Si l'approximation obtenue n'est pas suffisante, il convient alors d'augmenter le nombre n, si toutefois on en a la liberté, et l'on voit que la formule précédente présente un avantage important, puisque les calculs déjà faits ne sont en aucune façon à recommencer, mais seulement à compléter.

On peut employer le polynome $\varphi(x)$ pour effectuer sur $f(x)$ les opérations de différentiation ou d'intégration; mais nous n'insisterons pas sur ce point, qui sera développé plus loin, suivant les méthodes du calcul des différences.

Application. — On donne les valeurs correspondantes

$$\begin{array}{ll}
x_0 = 0, & y_0 = 9^\circ.28'.40'',3, \\
x_1 = 10,0600, & y_1 = 8.25.45,4, \\
x_2 = -11,9708, & y_2 = 10.18.\ 6,2, \\
x_3 = 3,0432, & y_3 = 9.11.13,0, \\
x_4 = -\ 6,6954, & y_4 = 10.\ 0.49,3,
\end{array}$$

et l'on demande de calculer les variations première et seconde de y pour $x_0 = 0$. (Ces données sont empruntées au travail de M. R.-T. Crawford consacré à des applications de la méthode de M. A.-O. Leuschner pour la détermination des orbites, *Publications of the Lick Observatory*, vol. VII.) On a ici

$$a_1 = (y_0 y_1) - x_1(y_0 y_1 y_2) + x_1 x_2 (y_0 y_1 y_2 y_3) - x_1 x_2 x_3 (y_0 y_1 y_2 y_3 y_4),$$

$$a_2 = (y_0 y_1 y_2) - (x_1 + x_2)(y_0 y_1 y_2 y_3) + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)(y_0 y_1 y_2 y_3 y_4),$$

et l'on trouve successivement, de la façon la plus simple, en prenant

la seconde pour unité de y :

$$(y_0 y_1) = [2,574307 -], \qquad (y_0 y_1 y_2) = [0,76241 -],$$
$$(y_1 y_2) = [2,485681 -], \qquad (y_1 y_2 y_3) = [0,74128 -],$$
$$(y_2 y_3) = [2,426995 -], \qquad (y_2 y_3 y_4) = [0,86118 -],$$
$$(y_3 y_4) = [2,485180 -],$$
$$(y_0 y_1 y_2 y_3) = [\bar{2},9557], \qquad (y_0 y_1 y_2 y_3 y_4) = [\bar{3},3292 -],$$
$$(y_1 y_2 y_3 y_4) = [\bar{1},0195],$$

et par suite

$$a_1 = [2,51678 -], \qquad a_2 = [0,72790 -].$$

On peut vérifier le calcul en déterminant encore

$$a_3 = [\bar{2},9672], \qquad a_4 = [\bar{3},3292 -],$$

et constatant que le polynome

$$y_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

prend bien les valeurs y_1, y_2, y_3, y_4 pour x_1, x_2, x_3, x_4.

55. Quand on connaît la fonction $f(x)$ par sa définition analytique, et lorsque le nombre n est suffisamment grand, il est souvent possible d'apprécier plus exactement l'erreur due à l'interpolation parabolique, en se rendant compte de l'ordre de grandeur du coefficient a_n par la recherche de sa valeur asymptotique : d'une façon générale, si $F(n)$ est une fonction du nombre positif très grand n, on appelle *valeur asymptotique* de $F(n)$ une valeur approchée $F'(n)$ de cette quantité telle que l'on puisse poser

$$F(n) = F'(n)(1 + \varepsilon),$$

ε tendant vers zéro lorsque n devient infini.

Nous allons résumer ici très brièvement, d'après les travaux bien connus de G. Darboux, de J.-B. Flamme et de M. M. Hamy [1], l'en-

---

[1] G. Darboux, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. IV, 1878; M. Hamy, *ibid.*, 6e série, t. IV, 1908; J.-B Flamme, *Annales de l'Observatoire de Bordeaux*, t. II, 1887.

semble des règles qui pourront nous être utiles, maintenant et dans la suite, dans la recherche de quelques valeurs asymptotiques.

Rappelons d'abord quelques propriétés élémentaires de la fonction eulérienne $\Gamma(x)$. Si n est un entier positif,

$$\Gamma(n) = 1.2.3\ldots(n-1),$$
$$\Gamma(x+n) = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)\Gamma(x);$$

en particulier,

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(2) = 1, \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \qquad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$

La fonction $\Gamma(x)$ admet comme points singuliers les pôles simples $x = 0, -1, -2, -3, \ldots$, et n désignant un entier positif ou nul, le résidu relatif au pôle $x = -n$ a pour valeur

$$\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)}.$$

D'après la formule dite de Stirling, la valeur asymptotique de $\Gamma(n+x)$ est

$$\sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{n+x-\frac{1}{2}}$$

(e désignant, comme d'habitude, la base des logarithmes hyperboliques), et par suite, on a asymptotiquement encore

$$\frac{\Gamma(n+x)}{\Gamma(n+y)} = n^{x-y}.$$

Considérons maintenant l'expression

$$y = \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^\alpha;$$

l'exposant α est une quantité réelle quelconque, et s'il n'est pas entier, y a la détermination qui se réduit à 1 pour $z = 0$. En supposant le module de z inférieur à celui de z_0, cherchons le coefficient a_n de z^n dans le développement de y suivant les puissances croissantes de z; on a

$$a_n = \frac{(-1)^n}{z_0^n}\,\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{1.2.3\ldots n} = \frac{1}{z_0^n}\,\frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n+1)},$$

et par suite, la valeur asymptotique de a_n est

$$\frac{1}{z_0^n}\frac{n^{-1-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)},$$

en supposant, bien entendu, que α n'est pas un entier positif ou nul.

En dérivant k fois l'expression de y par rapport à α, et faisant de même pour celle de a_n, on voit que la valeur asymptotique du coefficient a'_n de z^n dans le développement de

$$y' = \left(1-\frac{z}{z_0}\right)^\alpha L^k\left(1-\frac{z}{z_0}\right)$$

[L est la caractéristique des logarithmes hyperboliques, et la détermination de $L\left(1-\frac{z}{z_0}\right)$ est celle qui se réduit à zéro pour $z=0$] est égale, si α n'est pas un entier positif ou nul, à

$$\frac{(-1)^k}{z_0^n}\frac{n^{-1-\alpha}L^k n}{\Gamma(-\alpha)},$$

et, dans le cas contraire, à

$$\frac{(-1)^{k+\alpha}}{z_0^n}k\Gamma(\alpha+1)n^{-1-\alpha}L^{k-1}n.$$

De la même façon, si l'on fait maintenant

$$y = \left(1-\frac{z_0}{z}\right)^\alpha,$$

et que l'on développe cette expression suivant les puissances de $\frac{1}{z}$, sous les mêmes conditions de légitimité que précédemment, on aura, pour valeur asymptotique du coefficient de $\frac{1}{z^n}$, la même expression que ci-dessus, z_0 étant changé en $\frac{1}{z_0}$; et la dérivation par rapport à α conduira aux mêmes conséquences.

Soit alors une fonction développable en série de Taylor, ou plus généralement en série de Laurent, sous la forme

$$f(z) = \sum a_n z^n,$$

n prenant toutes les valeurs entières positives ou non. Cette série

double est convergente tant que le point représentatif de la variable complexe z reste compris à l'intérieur d'une couronne limitée par deux circonférences ayant pour centre l'origine.

Pour trouver la valeur asymptotique du coefficient a_n, n étant positif très grand, il suffit de considérer les points singuliers de la fonction situés sur la circonférence extérieure. Soit z_0 l'un d'eux, et supposons que, dans le domaine de z_0, la fonction soit développable sous la forme d'une somme de termes tels que

$$A\left(1-\frac{z}{z_0}\right)^\alpha L^k\left(1-\frac{z}{z_0}\right)$$

(l'exposant α étant quelconque, tandis que k est entier positif ou nul); soit A_n la valeur asymptotique du coefficient de z^n dans ce terme. La valeur asymptotique de a_n sera la somme des quantités A_n qui sont de l'ordre de grandeur le plus élevé par rapport à n. Si l'on se borne au cas très général où il n'y a pas de termes logarithmiques, il suffira donc de prendre la somme des quantités A_n qui correspondent, pour les différents points singuliers z_0, à la valeur minima (non entière positive ou nulle) des exposants α.

De même, pour trouver la valeur asymptotique du coefficient a_{-n}, n étant toujours positif très grand, on considérera les points singuliers situés sur la circonférence intérieure qui limite le domaine de convergence de $f(z)$, et si la fonction est développable dans le domaine de chacun d'eux sous la forme d'une somme de termes tels que

$$A\left(1-\frac{z_0}{z}\right)^\alpha L^k\left(1-\frac{z_0}{z}\right),$$

on appliquera la même règle, A_n désignant cette fois la valeur asymptotique du coefficient de $\frac{1}{z^n}$ dans l'expression ci-dessus.

Considérons enfin l'intégrale

$$J_n = \int f(z)\,\varphi^n(z)\,dz,$$

et indiquons-en la valeur asymptotique quand n est un nombre positif quelconque très grand, sous certaines conditions que nous allons énoncer.

L'intégrale est prise suivant un certain chemin C tracé dans le

plan qui sert à représenter la variable complexe z; on suppose qu'il existe sur ce chemin, ou sur un chemin équivalent au point de vue de l'intégration et qu'on lui substituera, un point d'affixe a, tel que le long de C le module de la fonction $\varphi(z)$ soit inférieur à celui de $\varphi(a)$; on suppose, en outre, les fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ holomorphes dans le domaine du point a; enfin a est racine simple de la dérivée $\varphi'(z)$ de $\varphi(z)$, et n'annule pas $f(z)$.

Si le point (a) n'est pas une extrémité du chemin C, la valeur asymptotique de l'intégrale J_n est alors

$$f(a)\,\varphi^n(a)\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\sqrt{\frac{-\varphi(a)}{\varphi''(a)}},$$

en désignant par $\varphi''(z)$ la dérivée seconde de $\varphi(z)$; pour préciser complètement, ajoutons que l'argument du radical $\sqrt{-\frac{\varphi(a)}{\varphi''(a)}}$ qui figure dans cette formule diffère (à un multiple de 2π près) d'un angle inférieur en valeur absolue à $\frac{\pi}{4}$ de l'argument de la direction de la tangente en (a) au chemin C, menée dans le sens de l'intégration.

Si le point (a) est l'une des extrémités du chemin d'intégration, la valeur asymptotique précédente doit être diminuée de moitié. Bien entendu, si le chemin C passe par plusieurs points tels que (a), pour lesquels $\varphi(z)$ a un même module maximum, il faudra faire la somme des expressions précédentes relatives à chacun de ces points.

56. Dans le problème de l'interpolation *périodique*, la fonction $f(x)$ à interpoler, supposée réelle et dépourvue de singularités dans le domaine réel, admet une période que l'on peut toujours prendre égale à 2π, et par suite est développable en série de Fourier sous la forme

$$\begin{aligned} y = f(x) = \alpha_0 + 2\alpha_1 \cos x + 2\alpha_2 \cos 2x + 2\alpha_3 \cos 3x + \ldots \\ + 2\beta_1 \sin x + 2\beta_2 \sin 2x + 2\beta_3 \sin 3x + \ldots, \end{aligned}$$

toujours convergente pour les valeurs réelles de x. Comme précédemment, on suppose ce développement pratiquement utilisable pour le calcul, c'est-à-dire que les coefficients α_n, β_n décroissent

avec une rapidité suffisante, au moins à partir d'un certain rang peu éloigné.

Si l'on pose

$$z = e^{ix},$$

en désignant par e la base des logarithmes hyperboliques et par i l'imaginaire $\sqrt{-1}$, on peut écrire aussi, sous la forme d'une série de Laurent,

$$y = \sum a_n z^n,$$

n prenant toutes les valeurs entières, positives ou non, et l'on a, en supposant maintenant n non négatif,

$$a_n = \alpha_n - i\beta_n, \qquad a_{-n} = \alpha_n + i\beta_n.$$

Dans les questions que nous aurons à traiter, la fonction $f(x)$ sera donnée par sa forme analytique, et par suite on peut choisir à volonté les valeurs de x pour lesquelles on considère la fonction y comme connue : on trouve alors le plus grand avantage à prendre pour ces valeurs les termes d'une progression arithmétique dont la raison est commensurable avec la circonférence. Si, d'ailleurs, on restait dans le cas général, il serait aisé de ramener le problème à celui de l'interpolation parabolique.

Soient donc x_0 un angle quelconque, et ω un angle commensurable avec π, tel que $p\omega$ soit le premier multiple de cet angle qui soit égal à un multiple de 2π; et faisons

$$x_k = x_0 + k\omega;$$

en donnant à k les p valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$, on a pour x autant de valeurs distinctes, c'est-à-dire incongrues suivant le module 2π. En d'autres termes encore, si l'on marque sur le cercle trigonométrique élémentaire les extrémités A_k des arcs x_k, on obtient p points distincts qui sont les sommets d'un polygone régulier de p côtés.

Nous supposerons connues les valeurs y_k de $f(x)$ qui correspondent aux valeurs x_k de x.

Si j est un entier quelconque, la représentation géométrique précédente rend évidentes les égalités

$$\sum \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\} j x_k = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sum \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\} j x_k = p \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\} j x_0,$$

suivant que j n'est pas ou est divisible par p; les sommations sont étendues, comme dans ce qui suivra, à toutes les valeurs de l'indice k.

Si l'on tient compte encore des relations telles que

$$2\cos hx\cos jx = \cos(h+j)x + \cos(h-j)x,$$

et que l'on forme les sommes $\sum y_k \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\} jx_k$, on obtient immédiatement, en se limitant aux valeurs entières de j non négatives et non supérieures à $\frac{p}{2}$, les relations fondamentales suivantes :

$$\alpha_j = \frac{1}{p}\sum y_k \cos jx_k - (\alpha_{p-j}+\alpha_{p+j})\cos px_0 - (\alpha_{2p-j}+\alpha_{2p+j})\cos 2px_0 - \ldots$$
$$- (\beta_{p-j}+\beta_{p+j})\sin px_0 - (\beta_{2p-j}+\beta_{2p+j})\sin 2px_0 - \ldots,$$
$$\beta_j = \frac{1}{p}\sum y_k \sin jx_k - (\alpha_{p-j}-\alpha_{p+j})\sin px_0 - (\alpha_{2p-j}-\alpha_{2p+j})\sin 2px_0 - \ldots$$
$$+ (\beta_{p-j}-\beta_{p+j})\cos px_0 + (\beta_{2p-j}-\beta_{2p+j})\cos 2px_0 - \ldots.$$

Si donc p est d'abord impair, de la forme $2q+1$, on détermine ainsi les p coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ en fonction des données et des coefficients d'indice supérieur $\alpha_{q+1}, \beta_{q+1}, \ldots$; en négligeant ces derniers, on obtient une série de Fourier limitée qui fournit la formule d'interpolation cherchée. Les erreurs commises sont en évidence, et l'on voit que si l'on admet la décroissance régulière des coefficients α_n, β_n d'indice supérieur à q, les erreurs sont d'autant plus petites que l'indice j est lui-même plus petit.

En particulier, pour $j=0$, l'erreur commise sur α_0 en prenant pour ce coefficient la quantité $\frac{1}{p}\sum y_k$, c'est-à-dire la moyenne arithmétique des y_k, a pour partie principale

$$-2\alpha_p\cos px_0 - 2\beta_p \sin px_0.$$

Si, maintenant, on suppose p pair, de la forme $2q$, rien n'est changé à ce qui précède tant que l'indice j n'est pas égal à q; mais pour $j=q$, les deux relations générales se réduisent à

$$2\alpha_q\cos qx_0 + 2\beta_q\sin qx_0$$
$$= \frac{1}{p}\sum(-1)^k y_k - (2\alpha_{3q}\cos 3qx_0 + 2\beta_{3q}\sin 3qx_0) - \ldots,$$

et établissent simplement entre α_q et β_q une relation dont l'erreur est de l'ordre de α_{3q}.

Si l'on choisit $x_0 = 0$, ou bien $x_0 = \frac{\pi}{p}$, les formules précédentes se simplifient; en particulier, si p est pair, on peut ainsi déterminer α_q ou β_q suivant le cas.

L'application des formules ne demande aucune précaution spéciale : il suffira d'effectuer les opérations très simples indiquées, en préparant une fois pour toutes, quand x_0 et ω sont choisis, le tableau des multiplicateurs $\cos jx_k$ et $\sin jx_k$. Afin de réduire au minimum le nombre de ceux de ces multiplicateurs qui sont distincts, au signe près, il sera manifestement avantageux de faire $x_0 = 0$ et de prendre $\omega = \frac{2\pi}{p}$, p étant un multiple de 4. C'est ainsi que pour $p = 16$, on pourra écrire :

$$x_k = \begin{cases} 0^\circ;\ 22^\circ{,}5;\ 45^\circ;\ 67^\circ{,}5;\ 90^\circ;\ 112^\circ{,}5;\ 135^\circ;\ 157^\circ{,}5;\ 180^\circ; \\ 202^\circ{,}5;\ 225^\circ;\ 247^\circ{,}5;\ 270^\circ;\ 292^\circ{,}5;\ 315^\circ;\ 337^\circ{,}5; \end{cases}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{16}\sum y_k, \qquad \alpha_8 = \frac{1}{32}\sum (-1)^k y_k,$$

puis, pour $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$,

$$\alpha_j = \frac{1}{16}\sum y_k \alpha_j^k, \qquad \beta_j = \frac{1}{16}\sum y_k \beta_j^k,$$

les multiplicateurs α_j^k, β_j^k ayant les valeurs indiquées dans les Tableaux suivants, où l'on a fait

$$\lambda = \cos 45^\circ; \qquad \mu = \cos 22^\circ{,}5; \qquad \nu = \sin 22^\circ{,}5.$$

$$\alpha_j^k$$

$k \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1
1	μ	λ	ν	0	$-\nu$	$-\lambda$	$-\mu$
2	λ	0	$-\lambda$	-1	$-\lambda$	0	λ
3	ν	$-\lambda$	$-\mu$	0	μ	λ	$-\nu$
4	0	-1	0	1	0	-1	0
5	$-\nu$	$-\lambda$	μ	0	$-\mu$	λ	ν
6	$-\lambda$	0	λ	-1	λ	0	$-\lambda$
7	$-\mu$	λ	$-\nu$	0	ν	$-\lambda$	μ
8	-1	1	-1	1	-1	1	-1
9	$-\mu$	λ	$-\nu$	0	ν	$-\lambda$	μ
10	$-\lambda$	0	λ	-1	λ	0	$-\lambda$
11	$-\nu$	$-\lambda$	μ	0	$-\mu$	λ	ν
12	0	-1	0	1	0	-1	0
13	ν	$-\lambda$	$-\mu$	0	μ	λ	$-\nu$
14	λ	0	$-\lambda$	-1	$-\lambda$	0	λ
15	μ	λ	ν	0	$-\nu$	$-\lambda$	$-\mu$

$$\beta_j^k$$

$k \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0
1	ν	λ	μ	1	μ	λ	ν
2	λ	1	λ	0	$-\lambda$	-1	$-\lambda$
3	μ	λ	$-\nu$	-1	$-\nu$	λ	μ
4	1	0	-1	0	1	0	-1
5	μ	$-\lambda$	$-\nu$	1	$-\nu$	$-\lambda$	μ
6	λ	-1	λ	0	$-\lambda$	1	$-\lambda$
7	ν	$-\lambda$	μ	-1	μ	$-\lambda$	ν
8	0	0	0	0	0	0	0
9	$-\nu$	λ	$-\mu$	1	$-\mu$	λ	$-\nu$
10	$-\lambda$	1	$-\lambda$	0	λ	-1	λ
11	$-\mu$	λ	ν	-1	ν	λ	$-\mu$
12	-1	0	1	0	-1	0	1
13	$-\mu$	$-\lambda$	ν	1	ν	$-\lambda$	$-\mu$
14	$-\lambda$	-1	$-\lambda$	0	λ	1	λ
15	$-\nu$	$-\lambda$	$-\mu$	-1	$-\mu$	$-\lambda$	$-\nu$

Ls seules multiplications à effectuer sont donc celles de y_2, y_6, y_{10}, y_{14} par λ, et celles de y_1, y_3, y_5, y_7, y_9, y_{11}, y_{13}, y_{15} par λ, μ, ν: tout le calcul se réduit ensuite à des additions, dans lesquelles les termes se répartissent d'eux-mêmes en groupes qui se répètent, et à des divisions très simples.

Si la fonction $f(x)$ est paire, les coefficients β_n sont tous nuls; rien n'est changé au calcul précédent si l'on prend toujours $x_0 = 0$ et $\omega = \frac{2\pi}{p}$, p étant pair, égal à $2q$; on ne connaît alors en réalité que $q+1$ valeurs distinctes de y, puisque, k étant positif et inférieur à q, on a $y_{p-k} = y_k$, et l'on peut déterminer les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q$; comme on a aussi $\cos jx_{p-k} = \cos jx_k$, on voit que dans les sommes $\sum y_k \cos jx_k$, on peut supprimer les termes qui correspondent aux indices $q+1, q+2, \ldots, 2q-1$, en ayant soin de doubler ceux qui correspondent aux indices $1, 2, \ldots, q-1$.

De même, si la fonction $f(x)$ est impaire, les coefficients α_n sont tous nuls, et en prenant toujours les mêmes valeurs de x_0 et ω, rien encore ne sera changé au calcul; on ne connaît ici, en réalité, que $q-1$ valeurs distinctes de y, puisque l'on a $y_0 = y_p = 0$, et, dans les mêmes conditions que plus haut pour k, $y_{p-k} = -y_k$; par suite, on ne peut déterminer que les coefficients $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{q-1}$. Dans les sommes $\sum y_k \sin jx_k$, les termes qui correspondent à $k=0$ ou $k=p$ disparaissent, et les autres sont encore égaux deux à deux.

Des simplifications analogues, dans le détail desquelles il est inutile d'entrer, se présenteront, par exemple, si la fonction $f(x)$ se reproduit ou ne fait que changer de signe quand on augmente x de π, c'est-à-dire quand son développement ne dépend que des multiples pairs ou impairs de x.

Comme dans le cas de l'interpolation parabolique, on pourra se rendre compte de l'ordre de grandeur de l'erreur commise en déterminant, quand c'est possible, la valeur asymptotique des coefficients α_n et β_n; il suffira pour cela de déterminer la valeur asymptotique du coefficient a_n de la série de Laurent équivalente, d'après les principes rappelés ci-dessus; on a, en effet,

$$a_n = \alpha_n - i\beta_n,$$

de sorte que, d'après les hypothèses faites, α_n est la partie réelle de a_n, tandis que β_n est le coefficient de i changé de signe.

Nous avons déjà vu que le coefficient α_0 avait pour valeur approchée le nombre très simple $\frac{1}{p}\sum y_k$, avec une erreur dont la partie principale est $-2\alpha_p$, quand on prend $x_0 = 0$; ce résultat est particulièrement important, car on a, comme l'on sait,

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx;$$

on a donc ainsi un moyen très simple de calculer une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$, la fonction $f(x)$ admettant la période 2π; l'erreur est très petite dès que p est suffisamment grand, et peut d'ailleurs, dans beaucoup de cas, être appréciée comme nous venons de le dire.

Avant d'appliquer ce qui précède à un exemple, faisons encore observer que l'on peut sans peine étendre la méthode d'interpolation que nous venons de développer au cas d'une fonction de deux variables : il n'y a d'autre difficulté que la longueur des calculs. Supposons qu'une fonction $y = f(x, x')$ de deux angles x et x', analogue à la fonction $f(x)$ considérée précédemment, soit développable sous la forme

$$y = \alpha_0 + 2\alpha_1 \cos x + 2\alpha_2 \cos 2x + \ldots + 2\beta_1 \sin x + 2\beta_2 \sin 2x + \ldots,$$

les α_i et β_i étant eux-mêmes de la même forme par rapport à x'. On choisira p valeurs de x telles que $x_k = x_0 + k\omega$, comme plus haut, et p' valeurs de x' de la forme analogue $x'_{k'} = x'_0 + k'\omega'$, et l'on se donnera les pp' valeurs de y qui correspondent aux combinaisons des x_k avec les $x'_{k'}$; pour chaque valeur de k', on a p valeurs de y qui permettent de calculer les valeurs numériques correspondantes des premiers coefficients α_i, β_i comme précédemment; et l'on a ainsi, pour chacun de ces coefficients, p' valeurs particulières qui permettent d'en obtenir finalement le développement.

Application. — Soit la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \qquad (k < 1)$$

développable sous la forme

$$\alpha_0 + 2\alpha_2 \cos 2x + 2\alpha_4 \cos 4x + 2\alpha_6 \cos 6x +$$

En prenant $x_0 = 0$, $\omega = \frac{2\pi}{24}$, il suffit de calculer $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ pour $x = 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°$; et l'on a immédiatement les formules

$$\begin{aligned}
6\alpha_0 &= \left(\frac{1}{2}y_0 + y_2 + y_4 + \frac{1}{2}y_6\right) + (y_1 + y_3 + y_5),\\
12\alpha_{12} &= \left(\frac{1}{2}y_0 + y_2 + y_4 + \frac{1}{2}y_6\right) - (y_1 + y_3 + y_5),\\
12\alpha_2 &= (y_0 + y_2 - y_4 - y_6) + (y_1 - y_5)\sqrt{3},\\
12\alpha_{10} &= (y_0 + y_2 - y_4 - y_6) - (y_1 - y_5)\sqrt{3},\\
12\alpha_4 &= (y_0 - y_2 - y_4 + y_6) + (y_1 - 2y_3 + y_5),\\
12\alpha_8 &= (y_0 - y_2 - y_4 + y_6) - (y_1 - 2y_3 + y_5),\\
6\alpha_6 &= \left(\frac{1}{2}y_0 - y_2 + y_4 - \frac{1}{2}y_6\right);
\end{aligned}$$

les parties principales des erreurs commises sur les coefficients α_0, α_2, α_4, α_6, α_8, α_{10}, α_{12} sont d'ailleurs respectivement $-2\alpha_{24}$, $-\alpha_{22}$, $-\alpha_{20}$, $-\alpha_{18}$, $-\alpha_{16}$, $-\alpha_{14}$, $-\alpha_{36}$. On a, au surplus,

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}.$$

Faisant $k = 0,8$, et calculant avec des logarithmes à huit décimales, on a

$$\begin{aligned}
y_0 &= 1,\\
y_1 &= 1,0221508,\\
y_2 &= 1,0910894,\\
y_3 &= 1,2126781,\\
y_4 &= 1,3867505,\\
y_5 &= 1,5754932,\\
y_6 &= 1,6666667,\\
(y_5 - y_1)\sqrt{3} &= 0,9584172,
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 1,2702492, & \alpha_2 &= -0,1600621,\\
\alpha_4 &= 0,0300929, & \alpha_6 &= -0,0062787,\\
\alpha_8 &= 0,0013783, & \alpha_{10} &= -0,0003259,\\
\alpha_{12} &= 0,0000709.
\end{aligned}$$

D'après la décroissance régulière de ces coefficients, on prévoit que les erreurs doivent être insensibles, sauf sur α_{10}, α_8 et peut-être

aussi α_6. C'est ce qu'il est facile de vérifier par un calcul direct. Si, en effet, l'on pose

$$k' = \sqrt{1 - k^2}, \qquad \varkappa = \frac{1 - k'}{1 + k'}, \qquad P_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \qquad (P_0 = 1),$$

on a, k n'étant pas petit, d'après la théorie des fonctions elliptiques,

$$\alpha_{2j} = \frac{2(-1)^j}{1 + k'} [P_j \varkappa^j + P_1 P_{j+1} \varkappa^{j+2} + P_2 P_{j+2} \varkappa^{j+4} + \ldots];$$

le calcul est fort simple ici, puisque $k' = 0{,}6$, $\varkappa = \frac{1}{4}$, et l'on trouve

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 = 1{,}2702492, & \alpha_2 = -0{,}1600620, \\ \alpha_4 = 0{,}0300927, & \alpha_6 = -0{,}0062778, \\ \alpha_8 = 0{,}0013744, & \alpha_{10} = -0{,}0003094, \\ \alpha_{12} = 0{,}0000709, & \alpha_{14} = -0{,}0000165, \\ \alpha_{16} = 0{,}0000039, & \alpha_{18} = -0{,}0000009, \\ \alpha_{20} = 0{,}0000002, & \end{array}$$

ce qui vérifie tout ce qui a été dit ci-dessus.

Cherchons encore la valeur asymptotique du coefficient α_{2n}; en faisant ici $z = e^{2ix}$, on a

$$f(x) = \sum \alpha_{2n}(z^n + z^{-n}) \qquad (n \geqq 0);$$

d'ailleurs, en posant $k = \sin\varphi$, on a immédiatement

$$f(x) = \text{séc}^2 \frac{\varphi}{2} \left(1 + z \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2}}{z}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

de sorte que le développement de $f(x)$, suivant les puissances de z, est convergent dans la couronne limitée par les deux cercles de rayons $\operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2}$ et $\cot^2 \frac{\varphi}{2}$; sur le cercle extérieur, on a le seul point singulier $z_0 = -\cot^2 \frac{\varphi}{2}$, et, par suite, il vient asymptotiquement, d'après la règle du numéro précédent,

$$\alpha_{2n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n\pi}} \operatorname{tang}^{2n} \frac{\varphi}{2} \sqrt{\text{séc}\,\varphi};$$

si, par exemple, dans le cas actuel, on fait $n=9$, on a ainsi

$$\alpha_{18} = -\frac{1}{3\times 2^{18}\sqrt{0,6\pi}} = -0,0000009,$$

comme ci-dessus; pour $n=7$, on a de même $\alpha_{14} = -0,0000168$; mais l'approximation ici obtenue est loin d'être toujours aussi grande.

57. Les calculs relatifs à l'interpolation périodique peuvent être dirigés d'une façon différente, quelquefois plus avantageuse.

Si l'on ignore, en effet, le rang p des derniers coefficients à déterminer pour obtenir le degré d'approximation que l'on recherche, on est exposé soit à choisir *a priori* p trop grand, et à faire alors des calculs inutiles, soit à choisir p trop petit, et par suite à se trouver dans l'obligation de recommencer le calcul. Pour éviter cet inconvénient et retrouver les avantages que nous avons reconnus à la formule générale de l'interpolation parabolique établie ci-dessus, on peut, d'après Le Verrier, procéder de la façon suivante.

Choisissons les valeurs de x pour lesquelles la fonction $y=f(x)$ est supposée connue, sous la forme $x_k = 2k\omega$, k recevant les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, jusqu'à $\pm p$, et ω étant un angle dont les multiples d'ordre élevé seuls peuvent se rapprocher sensiblement d'un multiple de π. Faisons

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}y_k &= y_k - y_{k-1},\\
\mathrm{D}^2 y_k &= \mathrm{D}y_k - 2\cos 2\omega\; \mathrm{D}y_{k-1} + \mathrm{D}y_{k-2},\\
\mathrm{D}^3 y_k &= \mathrm{D}^2 y_k - 2\cos 4\omega\; \mathrm{D}^2 y_{k-1} + \mathrm{D}^2 y_{k-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

jusqu'à

$$\mathrm{D}^p y_k = \mathrm{D}^{p-1} y_k - 2\cos(2p-2)\,\mathrm{D}^{p-1} y_{k-1} + \mathrm{D}^{p-1} y_{k-2};$$

dans cette dernière formule, k ne pourra recevoir que les valeurs p et $p-1$, manifestement.

On vérifie immédiatement, en allant de proche en proche, la formule générale

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^q y_k = (-4)^q \sum_j \sin(j-q+1)\omega \sin(j-q+2)\omega \ldots\\
\times \sin(j+q-2)\omega \sin(j+q-1)\omega\\
\times [\alpha_j \sin j(2k-2q+1)\omega - \beta_j \cos j(2k-2q+1)\omega],
\end{aligned}$$

en supposant toujours le développement

$$f(x) = \alpha_0 + 2\sum_j (\alpha_j \cos jx + \beta_j \sin jx),$$

de sorte que l'indice j prend toutes les valeurs positives entières.

En faisant dans cette formule $k = q$ et $k = q - 1$, et combinant les résultats par addition et soustraction, on a encore

$$\frac{D^q y_q - D^q y_{q-1}}{2} = (-4)^q \sum_j \alpha_j \sin j\omega$$
$$\times \sin(j-q+1)\omega \sin(j-q+2)\omega \ldots \sin(j+q-1)\omega,$$

$$-\frac{D^q y_q + D^q y_{q-1}}{2} = (-4)^q \sum_j \beta_j \cos j\omega$$
$$\times \sin(j-q+1)\omega \sin(j-q+2)\omega \ldots \sin(j+q-1)\omega.$$

Posons alors

$$P_q = (-4)^q \sin\omega \sin 2\omega \sin 3\omega \ldots \sin(2q-1)\omega,$$

puis

$$\lambda_q = \frac{1}{\sin q\omega . P_q}, \qquad \mu_q = \frac{-1}{\cos q\omega . P_q};$$

et généralement

$$\lambda_q^{(n)} = \lambda_q^{(n-1)} \frac{\sin(q+n)\omega}{\sin(q+n-1)\omega} \frac{\sin(2q+n-1)\omega}{\sin n\omega},$$

$$\mu_q^{(n)} = \mu_q^{(n-1)} \frac{\cos(q+n)\omega}{\cos(q+n-1)\omega} \frac{\sin(2q+n-1)\omega}{\sin n\omega},$$

avec

$$\lambda_q^{(0)} = \mu_q^{(0)} = -1.$$

On aura

$$\alpha_q = \lambda_q \frac{D^q y_q - D^q y_{q-1}}{2} + \lambda_q^{(1)} \alpha_{q+1} + \lambda_q^{(2)} \alpha_{q+2} + \ldots,$$

$$\beta_q = \mu_q \frac{D^q y_q + D^q y_{q-1}}{2} + \mu_q^{(1)} \beta_{q+1} + \mu_q^{(2)} \beta_{q+2} + \ldots.$$

Faisant successivement $q = p,\ p-1,\ p-2,\ \ldots,\ 2,\ 1$, et écrivant enfin

$$\alpha_0 = y_0 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 - \ldots,$$

on voit que l'on exprime les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ en fonction des données et des coefficients suivants, sous une forme qui présente les mêmes avantages que la solution pré-

cédente du problème de l'interpolation parabolique. En admettant la décroissance régulière des coefficients à partir d'un certain rang peu éloigné, le calcul successif des quantités $D^q y_q$ et $D^q y_{q-1}$ montre le rang p auquel il convient de s'arrêter pour pouvoir négliger α_{p+1}, β_{p+1}, ..., et l'on obtient ensuite très simplement les coefficients que l'on veut conserver.

Les coefficients λ_q, $\lambda_q^{(n)}$, μ_q, $\mu_q^{(n)}$, de même que les nombres σ_q qui servent au calcul des quantités

$$D^q y_k = D^{q-1} y_k + \sigma_q D^{q-1} y_{k-1} + D^{q-1} y_{k-2},$$

ne dépendent que du choix de ω, et peuvent être calculés une fois pour toutes. Pour $\omega = 37°$, par exemple, et en se limitant à l'hypothèse $p = 6$, on a

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &= [\bar{1},741368\ -],\\
\sigma_3 &= [0,229450\ \ ],\\
\sigma_4 &= [0,172103\ \ ],\\
\sigma_5 &= [\bar{1},942872\ -],\\
\sigma_6 &= [0,294381\ -],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= [\bar{1},839014\ -], & \mu_1 &= [\bar{1},716128\ \ ],\\
\lambda_1^{(1)} &= [0,406757\ -], & \mu_1^{(1)} &= [\bar{1},741368\ -],\\
\lambda_1^{(2)} &= [0,381377\ -], & \mu_1^{(2)} &= [\bar{1},842669\ \ ],\\
\lambda_1^{(3)} &= [\bar{1},889493\ -], & \mu_1^{(3)} &= [\bar{1},970819\ \ ],\\
\lambda_1^{(4)} &= [\bar{2},321666\ -], & \mu_1^{(4)} &= [\bar{1},256829\ -],\\
\lambda_1^{(5)} &= [0,092096\ -], & \mu_1^{(5)} &= [0,014773\ -],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= [\bar{1},080582\ \ ], & \mu_2 &= [\bar{1},623086\ -],\\
\lambda_2^{(1)} &= [\bar{1},932057\ -], & \mu_2^{(1)} &= [0,058738\ \ ],\\
\lambda_2^{(2)} &= [\bar{2},643569\ \ ], & \mu_2^{(2)} &= [\bar{1},390283\ -],\\
\lambda_2^{(3)} &= [\bar{3},715015\ \ ], & \mu_2^{(3)} &= [\bar{1},315566\ \ ],\\
\lambda_2^{(4)} &= [\bar{2},867966\ -], & \mu_2^{(4)} &= [\bar{1},456032\ -],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= [\bar{1},826706\ \ ], & \mu_3 &= [0,242529\ \ ],\\
\lambda_3^{(1)} &= [\bar{1},800106\ \ ], & \mu_3^{(1)} &= [0,420139\ \ ],\\
\lambda_3^{(2)} &= [\bar{1},025297\ \ ], & \mu_3^{(2)} &= [0,499168\ -],\\
\lambda_3^{(3)} &= [\bar{1},894020\ -], & \mu_3^{(3)} &= [0,355406\ \ ],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_4 &= [\bar{1},653131\ -], & \mu_4 &= [\bar{1},448920\ -],\\
\lambda_4^{(1)} &= [\bar{1},390283\ -], & \mu_4^{(1)} &= [0,244121\ \ ],\\
\lambda_4^{(2)} &= [\bar{1},949703\ \ ], & \mu_4^{(2)} &= [\bar{1},791055\ -],
\end{aligned}$$

$$\lambda_5 = [0,224277 -], \qquad \mu_5 = [\bar{1},166229 \ ],$$
$$\lambda_5^{(1)} = [0,345422 -], \qquad \mu_5^{(1)} = [\bar{1},332936 -],$$
$$\lambda_6 = [\bar{1},633205 \ ], \qquad \mu_6 = [\bar{1},587642 -].$$

Dans les cas particuliers, on pourra se servir des indications suivantes.

Si la fonction $f(x)$ est paire, on a

$$y_k = y_{-k},$$

et généralement

$$D^q y_k + D^q y_{2q-k-1} = 0.$$

Si la fonction $f(x)$ est impaire, on a

$$y_k = -y_{-k},$$

et généralement

$$D^q y_k = D^q y_{2q-k-1}.$$

Si la fonction $f(x)$ admet la période π, on remplace x par $\frac{x}{2}$, pour la ramener au cas général.

Si la fonction $f(x)$ change de signe quand on augmente x de π, on la remplacera par la fonction

$$\cos\frac{x}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \sin\frac{x}{2} f\left(\frac{x}{2}\right);$$

car si l'on a

$$\begin{aligned} f(x) = \ & 2\alpha_1 \cos x + 2\alpha_3 \cos 3x + 2\alpha_5 \cos 5x + \ldots \\ & + 2\beta_1 \sin x + 2\beta_3 \sin 3x + 2\beta_5 \sin 5x + \ldots, \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} \cos\frac{x}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) &= \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_3) \cos x + (\alpha_3 + \alpha_5) \cos 2x + \ldots \\ &\quad + (\beta_1 + \beta_3) \sin x + (\beta_3 + \beta_5) \sin 2x + \ldots, \\ \sin\frac{x}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) &= \beta_1 + (\beta_3 - \beta_1) \cos x + (\beta_5 - \beta_3) \cos 2x + \ldots \\ &\quad + (\alpha_1 - \alpha_3) \sin x + (\alpha_3 - \alpha_5) \sin 2x + \ldots. \end{aligned}$$

Reprenons comme exemple l'application du numéro précédent, en écrivant ici

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{x}{2}}} = \alpha_0 + 2\alpha_1 \cos x + 2\alpha_2 \cos 2x + \ldots,$$

de sorte que les coefficients α_j actuels sont égaux aux α_{2j} précédents. On a toujours $k = 0, 8$; faisant $\omega = 37^\circ$, on a, pour $k = 0, 1, 2, \ldots, 6$,

$$\frac{1}{2} x_k = 0^\circ,\ 37^\circ,\ 74^\circ,\ 111^\circ,\ 148^\circ,\ 185^\circ,\ 222^\circ,$$

et par suite

$$\begin{aligned} y_0 &= 1, \\ y_1 &= 1,140937, \\ y_2 &= 1,564364, \\ y_3 &= 1,503813, \\ y_4 &= 1,104128, \\ y_5 &= 1,002440, \\ y_6 &= 1,183910, \end{aligned}$$

d'où, successivement,

$$\begin{array}{lll} Dy_1 = 0,140937, & D^2y_2 = 0,204795, & D^3y_3 = -0,010482, \\ Dy_2 = 0,423427, & D^2y_3 = -0,153039, & D^3y_4 = 0,002348, \\ Dy_3 = -0,060551, & D^2y_4 = 0,057122, & D^3y_5 = 0,001942, \\ Dy_4 = -0,399685, & D^2y_5 = 0,058097, & D^3y_6 = -0,006497, \\ Dy_5 = -0,101688, & D^2y_6 = -0,162157, & \\ Dy_6 = 0,181470, & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} D^4y_4 = -0,002749, & D^5y_5 = 0,000109, & D^6y_6 = 0,000092, \\ D^4y_5 = -0,005050, & D^5y_6 = 0,000416, & \\ D^4y_6 = -0,001263, & & \end{array}$$

et par suite, immédiatement,

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 = 1,27019, & \alpha_1 = -0,16001, \\ \alpha_2 = 0,03004, & \alpha_3 = -0,00623, \\ \alpha_4 = 0,00134, & \alpha_5 = -0,00027, \\ \alpha_6 = 0,00004; & \end{array}$$

l'approximation obtenue est celle de la quatrième décimale, comme on devait s'y attendre d'après la valeur de $D^6 y_6$.

Finalement, on doit constater que l'avantage théorique de cette méthode compense mal les inconvénients qui résultent du peu de simplicité des calculs.

58. Dans la très grande majorité des cas, la fonction à interpoler, $y = f(x)$, est connue pour une série de valeurs de la variable x formant une progression arithmétique; de plus, on suppose comme

précédemment que la fonction $f(x)$ peut être assimilée, au point de vue du calcul, et au degré d'approximation que l'on recherche, à un polynome entier en x, dans tout le domaine où on l'envisage.

Dans ces conditions, c'est en suivant les méthodes du calcul des différences que se résoudront les problèmes d'interpolation.

Soit h une quantité fixe : on appelle *différence* (première) de la fonction $f(x)$ pour l'intervalle h, la nouvelle fonction

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x);$$

en réitérant cette opération, on définit les différences seconde, troisième, ...,

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x),$$
$$\Delta^3 f(x) = \Delta^2 f(x+h) - \Delta^2 f(x),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Il est commode de remplacer la variable x par une autre p telle que $x = x_0 + ph$, x_0 étant une valeur particulière de x; nous écrirons souvent en même temps x_p, y_p au lieu de x et y. On peut remplacer aussi p par $n+p$, n étant un nombre que l'on prend généralement entier et que l'on regarde comme fixe, sans que ces conditions soient obligatoires. On a alors

$$\Delta y_{n+p} = y_{n+p+1} - y_{n+p},$$

et l'on peut regarder la caractéristique Δ comme s'appliquant à la variable p, ou aussi bien à n ou même $(n+p)$, en prenant pour intervalle correspondant l'unité.

Il est clair que les différences successives d'un polynome sont elles-mêmes des polynomes dont le degré va en décroissant régulièrement d'une unité. Si m est le degré du polynome, la différence d'ordre m est constante, et les suivantes sont nulles. Si $f(x)$ est un polynome, et nous nous bornons ici à cette hypothèse afin d'éviter toute difficulté analytique, on peut trouver un autre polynome tel que sa différence première soit égale à $f(x)$: nous le représenterons par $\Delta^{-1} f(x)$. Il n'est déterminé qu'à une constante près, et son degré est supérieur d'une unité à celui de $f(x)$; on l'appelle *somme finie* de $f(x)$. On peut continuer de même et obtenir le polynome $\Delta^{-2} f(x)$ dont la différence sera $\Delta^{-1} f(x)$, et ainsi de suite. Pour déterminer complètement ces polynomes, il suffira de choisir arbitrairement, par exemple, les nombres $\Delta^{-1} y_0$, $\Delta^{-2} y_0$, ...

Supposons connues les valeurs successives $\ldots y_{n-2}, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots$ de la fonction y qui correspondent aux valeurs $\ldots x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ de la variable x, formant une progression arithmétique de raison h. Avec ces valeurs et avec leurs différences, et aussi avec leurs sommes finies, s'il y a lieu, on peut construire un tableau T tel que le suivant :

$$
(\mathrm{T})\left\{
\begin{array}{ccccccccccc}
 & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\
\ldots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \ldots \\
 & \Delta^{-2}y_{n-3} & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\
\ldots & & \Delta^{-1}y_{n-3} & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \ldots \\
 & \Delta^{-2}y_{n-2} & & y_{n-3} & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\
\ldots & & \Delta^{-1}y_{n-2} & & \Delta y_{n-3} & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \ldots \\
 & \Delta^{-2}y_{n-1} & & y_{n-2} & & \Delta^2 y_{n-3} & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\
\ldots & & \Delta^{-1}y_{n-1} & & \Delta y_{n-2} & & \Delta^3 y_{n-3} & & \cdots\cdots & & \ldots \\
 & \Delta^{-2}y_{n} & & y_{n-1} & & \Delta^2 y_{n-2} & & \Delta^4 y_{n-3} & & \cdots\cdots & \\
\ldots & & \Delta^{-1}y_{n} & & \Delta y_{n-1} & & \Delta^3 y_{n-2} & & \Delta^5 y_{n-3} & & \ldots \\
 & \Delta^{-2}y_{n+1} & & y_{n} & & \Delta^2 y_{n-1} & & \Delta^4 y_{n-2} & & \Delta^6 y_{n-3} & \\
\ldots & & \Delta^{-1}y_{n+1} & & \Delta y_{n} & & \Delta^3 y_{n-1} & & \Delta^5 y_{n-2} & & \ldots \\
 & \Delta^{-2}y_{n+2} & & y_{n+1} & & \Delta^2 y_{n} & & \Delta^4 y_{n-1} & & \cdots\cdots & \\
\ldots & & \Delta^{-1}y_{n+2} & & \Delta y_{n+1} & & \Delta^3 y_{n} & & \cdots\cdots & & \ldots \\
 & \Delta^{-2}y_{n+3} & & y_{n+2} & & \Delta^2 y_{n+1} & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\
\ldots & & \Delta^{-1}y_{n+3} & & \Delta y_{n+2} & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \ldots \\
 & \Delta^{-2}y_{n+4} & & y_{n+3} & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\
\ldots & & \Delta^{-1}y_{n+4} & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \ldots \\
 & \Delta^{-2}y_{n+5} & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\
\ldots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \ldots \\
 & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots &
\end{array}
\right.
$$

Chacun des nombres de ce tableau est la différence entre les deux nombres situés à sa gauche immédiatement au-dessus et au-dessous, ou encore la somme des deux nombres situés immédiatement au-dessus de lui, dans la même colonne et à droite. Il en résulte, par exemple, en désignant par k un entier positif, que l'on a

$$\Delta^{-1} y_{n+k+1} - \Delta^{-1} y_n = y_n + y_{n+1} + y_{n+2} + \ldots + y_{n+k},$$

ce qui justifie le nom de *somme finie* donné à $\Delta^{-1} f(x)$.

On voit aussi que l'on a successivement

$$\begin{aligned}
\Delta y_n &= y_{n+1} - y_n, \\
\Delta^2 y_n &= y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n, \\
\Delta^3 y_n &= y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

les coefficients étant ceux du développement de $(1 - a)^k$, en général.

De même encore, on a successivement

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta y_n, \\ y_{n+2} &= y_n + 2\Delta y_n + \Delta^2 y_n, \\ y_{n+3} &= y_n + 3\Delta y_n + 3\Delta^2 y_n + \Delta^3 y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

les coefficients étant ceux du développement de $(1+a)^k$, en général.

On peut écrire aussi bien

$$\begin{aligned} y_{n-1} &= y_n - \Delta y_{n-1}, \\ y_{n-2} &= y_n - 2\Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-2}, \\ y_{n+3} &= y_n - 3\Delta y_{n-1} + 3\Delta^2 y_{n-2} - y_{n-3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

comme le montre d'ailleurs la symétrie évidente du tableau T, qui peut être retourné sans perdre sa signification, autour de la ligne horizontale contenant y_n, à la condition de changer en même temps le signe des différences ou sommes d'ordre impair.

En supposant que $f(x)$ soit un polynome, on peut évidemment l'exprimer en fonction linéaire et homogène de y_n, Δy_n, $\Delta^2 y_n$, ..., cette suite étant continuée jusqu'au moment où les différences $\Delta^k y_n$ s'évanouissent.

En faisant, pour k entier positif ou nul, p quelconque,

$$C_p^k = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1.2.3\ldots k}, \qquad C_p^0 = 1,$$

il suffit d'écrire

$$y_{n+p} = \sum_k C_p^k \Delta^k y_n = y_n + C_p^1 \Delta y_n + C_p^2 \Delta^2 y_n + C_p^3 \Delta^3 y_n + \ldots,$$

car, d'après ce qui précède, en supposant successivement $p = 0, 1, 2, \ldots, m$, dans cette formule, m désignant le degré du polynome, on retrouve précisément

$$y_n, \quad y_{n+1}, \quad \ldots, \quad y_{n+m}.$$

On arrive au même résultat par le raisonnement suivant, qui nous servira dans d'autres cas moins simples : si l'on suppose le développement

$$y_{n+p} = \sum_k A_k \Delta^k y_n,$$

le coefficient A_k, fonction de p, est manifestement déterminé par la condition que l'on ait, pour $p = 0$,

$$\Delta^j A_k = \begin{cases} 0 & \text{pour } j \neq k, \\ 1 & \text{pour } j = k. \end{cases}$$

Or l'égalité évidente

$$\Delta^j (1 + a)^p = a^j (1 + a)^p$$

montre qu'il en est précisément ainsi du coefficient C_p^k de a^k dans le développement de $(1 + a)^p$; on a donc bien $A_k = C_p^k$, puisque ces quantités sont toutes deux des polynomes en p.

Si la fonction $f(x)$ n'est pas un polynome, le développement précédent de y_{n+p} se présente sous forme illimitée, et son étude analytique présente des difficultés; mais si, comme nous le supposons, la fonction $f(x)$ est assimilable à un polynome dans le domaine où on l'envisage, il arrive en fait, comme le montre l'expérience, et comme nous le vérifierons plus loin, qu'en supposant h suffisamment petit et p compris entre des limites convenables, les termes de ce développement ne tardent pas à décroître rapidement. Nous avons donc, dans les mêmes conditions qu'au n° 54, l'importante formule d'interpolation due à Newton

$$y_{n+p} = y_n + C_p^1 \Delta y_n + C_p^2 \Delta^2 y_n + C_p^3 \Delta^3 y_n + \ldots;$$

c'est d'ailleurs la formule même du n° 54 : il suffit d'imaginer que l'on y fait

$$x_1 = x_0 + h, \qquad x_2 = x_0 + 2h, \qquad x_3 = x_0 + 3h, \qquad \ldots, \qquad x = x_0 + ph,$$

comme on le voit immédiatement.

Nous n'insisterons pas ici sur l'usage de la formule de Newton, qui est, pour ainsi dire, de chaque instant.

Toutes les formules analogues que nous allons établir dans ce qui suit doivent être comprises et appliquées de la même façon, sans qu'il soit nécessaire de revenir sur ce point.

Nous venons d'exprimer y_{n+p} en fonction des nombres du Tableau T qui se trouvent à partir de y_n sur une même diagonale descendante (de gauche à droite); on l'exprimerait de même en fonction des nombres placés sur la diagonale ascendante. En raisonnant d'une façon toute semblable et utilisant, si l'on veut, l'égalité

$$\Delta^j (1 - a)^{-p} = a^j (1 - a)^{-p-j},$$

ou encore en profitant plus simplement de la symétrie du tableau, on a

$$y_{n+p} = \sum C_p'^k \Delta^k y_{n-k} = y_n + C_p'^1 \Delta y_{n-1} + C_p'^2 \Delta^2 y_{n-2} + C_p'^3 \Delta^3 y_{n-3} + \ldots,$$

avec

$$C_p'^k = \frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+k-1)}{1.2.3\ldots k} = C_{p+k-1}^k, \qquad C_p'^0 = 1.$$

Sous une forme abrégée très simple, les deux formules précédentes peuvent s'écrire symboliquement

$$y^{n+p} = y^n(1+\Delta)^p = y^n\left(1-\frac{\Delta}{y}\right)^{-p},$$

en convenant de regarder le produit $\Delta^k y^s$ comme égal à la différence $\Delta^k y_s$: ceci n'offre aucun inconvénient tant que l'on se borne à considérer des formules linéaires et homogènes par rapport à ces quantités.

Cette notion de calcul symbolique, qui pourrait facilement être prise comme base du calcul des différences, peut être étendue, toujours avec la même réserve. On peut évidemment multiplier les relations précédentes par une puissance quelconque positive ou négative de y ou de Δ, l'exposant étant entier quand il s'agit de Δ ; et comme elles reviennent en somme, l'une comme l'autre, à l'égalité

$$y = 1 + \Delta,$$

on peut généralement obtenir toutes les relations possibles entre les $\Delta^k y_s$ par la simple transformation de cette égalité.

59. Il est souvent avantageux d'employer une autre notation pour représenter les différences. Faisons maintenant

$$\delta f(x) = f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right),$$

et de même, par réitération,

$$\delta^2 f(x) = \delta f\left(x+\frac{h}{2}\right) - \delta f\left(x-\frac{h}{2}\right), \qquad \ldots;$$

c'est-à-dire encore

$$\delta y_{n+p} = y_{n+p+\frac{1}{2}} - y_{n+p-\frac{1}{2}},$$

$$\delta^2 y_{n+p} = \delta y_{n+p+\frac{1}{2}} - \delta y_{n+p-\frac{1}{2}}, \qquad \ldots;$$

on a, par suite,

$$\delta y_{n+p} = \Delta y_{n+p-\frac{1}{2}},$$

et généralement

$$\delta^k y_{n+p} = \Delta^k y_{n+p-\frac{k}{2}}.$$

Dans les mêmes conditions que ci-dessus, on pourra aussi définir $\delta^{-1}f(x)$, $\delta^{-2}f(x)$, ... telles que

$$\delta[\delta^{-1}f(x)] = f(x), \qquad \delta[\delta^{-2}f(x)] = \delta^{-1}f(x), \qquad \ldots.$$

En même temps, nous ferons encore

$$\mu f(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(x+\frac{h}{2}\right)+f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right],$$

de sorte que $\mu f(x)$ désigne la moyenne arithmétique entre $f\left(x+\frac{h}{2}\right)$ et $f\left(x-\frac{h}{2}\right)$, comme $\delta f(x)$ en est la différence.

Les opérations caractérisées par les lettres μ et δ peuvent être combinées ensemble; elles sont d'ailleurs commutatives, et l'on a par exemple

$$\begin{aligned}\mu\delta f(x) &= \frac{1}{2}\left[\delta f\left(x+\frac{h}{2}\right)+\delta f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right]\\ &= \mu f\left(x+\frac{h}{2}\right)-\mu f\left(x-\frac{h}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}f(x+h)-\frac{1}{2}f(x-h).\end{aligned}$$

En particulier, si l'on part de la formule évidente

$$\delta a^p = a^p\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right),$$

l'intervalle de la variable p équivalente à x étant toujours l'unité, on vérifie immédiatement les relations suivantes, dont nous aurons bientôt à faire usage :

$$\delta^k\left(\frac{\alpha}{2}+\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{4}}\right)^{2p} = \mu\delta^k\frac{\left(\frac{\alpha}{2}+\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{4}}\right)^{2p}}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{4}}} = \alpha^k\left(\frac{\alpha}{2}+\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{4}}\right)^{2p}.$$

En introduisant dans le tableau T la notation δ au lieu de Δ, et en

y mettant aussi les moyennes arithmétiques, il devient

$$
(\theta)\quad \left\{
\begin{array}{cccccccc}
\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots & \delta^{-2} y_{n-1} & \mu\delta^{-1} y_{n-1} & y_{n-1} & \mu\delta y_{n-1} & \delta^2 y_{n-1} & \mu\delta^3 y_{n-1} & \delta^4 y_{n-1} \\
\ldots & \mu\delta^{-2} y_{n-\frac{1}{2}} & \delta^{-1} y_{n-\frac{1}{2}} & \mu y_{n-\frac{1}{2}} & \delta y_{n-\frac{1}{2}} & \mu\delta^2 y_{n-\frac{1}{2}} & \delta^3 y_{n-\frac{1}{2}} & \mu\delta^4 y_{n-\frac{1}{2}} \\
\ldots & \delta^{-2} y_{n} & \mu\delta^{-1} y_{n} & y_{n} & \mu\delta y_{n} & \delta^2 y_{n} & \mu\delta^3 y_{n} & \delta^4 y_{n} \\
\ldots & \mu\delta^{-2} y_{n+\frac{1}{2}} & \delta^{-1} y_{n+\frac{1}{2}} & \mu y_{n+\frac{1}{2}} & \delta y_{n+\frac{1}{2}} & \mu\delta^2 y_{n+\frac{1}{2}} & \delta^3 y_{n+\frac{1}{2}} & \mu\delta^4 y_{n+\frac{1}{2}} \\
\ldots & \delta^{-2} y_{n+1} & \mu\delta^{-1} y_{n+1} & y_{n+1} & \mu\delta y_{n+1} & \delta^2 y_{n+1} & \mu\delta^3 y_{n+1} & \delta^4 y_{n+1} \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}
\right.
$$

Tous ces nombres résultent de la connaissance de $\ldots, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \ldots$ et du choix de $\mu\delta^{-1} y_n$, $\delta^{-2} y_n, \ldots$, par exemple ; ceux d'une même ligne ont tous le même indice ; on a ici, k étant toujours un entier positif,

$$\mu\delta^{-1} y_{n+k} - \mu\delta^{-1} y_n = \frac{1}{2} y_n + y_{n+1} + y_{n+2} + \ldots + y_{n+k-1} + \frac{1}{2} y_{n+k}.$$

On obtient deux formules d'interpolation importantes en exprimant y_{n+p} à l'aide des nombres qui se trouvent à partir de y_n ou $\mu y_{n+\frac{1}{2}}$ sur une même ligne du tableau Θ, vers la droite.

Cherchons d'abord, en supposant que $f(x)$ soit un polynome, son expression en fonction de y_n, δy_n, $\delta^2 y_n$, $\delta^3 y_n, \ldots$. Si l'on suppose le développement

$$y_{n+p} = \sum_k A_k \delta^k y_n,$$

il est clair que le coefficient A_k est déterminé par la condition que l'on ait, pour $p = 0$,

$$\delta^j A_k = \begin{cases} 0 & \text{pour } j \neq k, \\ 1 & \text{pour } j = k. \end{cases}$$

Il résulte alors de ce qui a été dit ci-dessus, que A_k n'est autre chose que le coefficient de α^k dans le développement de la fonction

$$\varphi(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{2} + \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{4}}\right)^{2p}$$

suivant les puissances de α, car ce coefficient vérifie manifestement les conditions précédentes, et est comme A_k un polynome en p.

De même, si l'on cherche l'expression du polynome $f(x)$ en fonc-

tion de μy_n, $\mu\delta y_n$, $\mu\delta^2 y_n$, ..., et que l'on suppose le développement

$$y_{n+p} = \sum_k B_k \mu\delta^k y_n,$$

le coefficient B_k est tel que l'on ait, pour $p = 0$,

$$\mu\delta^j B_k = \begin{cases} 0 & \text{pour } j \neq k, \\ 1 & \text{pour } j = k, \end{cases}$$

et par suite c'est le coefficient de α^k dans le développement suivant les puissances de α de la fonction

$$\psi(\alpha) = \frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{4}}}.$$

Pour déterminer effectivement les coefficients A_k et B_k, il suffit d'observer les deux relations

$$(\alpha^2+4)\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + \alpha\frac{d\varphi}{d\alpha} - 4p^2\varphi = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = p\psi,$$

qui donnent

$$A_{k+2} = A_k \frac{p^2 - \frac{k^2}{4}}{(k+1)(k+2)}, \qquad B_k = A_{k+1}\frac{k+1}{p};$$

de plus, $A_0 = B_0 = 1$.

Faisant donc, suivant la parité de k,

$$P_p^{2i} = \frac{p^2(p^2-1)(p^2-4)\ldots[p^2-(i-1)^2]}{1.2.3\ldots(2i)}, \qquad P_p^0 = 1,$$

$$P_p^{2i+1} = \frac{p\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)\cdots\left[p^2-\frac{(2i-1)^2}{4}\right]}{1.2.3\ldots(2i+1)}, \qquad P_p^1 = p,$$

on a généralement

$$A_k = P_p^k = \frac{p}{k}C_{p+\frac{k}{2}-1}^{k-1}.$$

De même, avec

$$P'^{2i}_p = \frac{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)\cdots\left[p^2-\frac{(2i-1)^2}{4}\right]}{1.2.3\ldots(2i)}, \qquad P'^0_p = 1,$$

$$P'^{2i+1}_p = \frac{p(p^2-1)(p^2-4)\ldots(p^2-i^2)}{1.2.3\ldots(2i+1)}, \qquad P'^1_p = p,$$

on a

$$B_k = P'^k_p = C^k_{p+\frac{k-1}{2}}.$$

Finalement, il vient

$$y_{n+p} = \sum_k P^k_p \delta^k y_n = \sum_k P'^k_p \mu\delta^k y_n.$$

En observant que les quantités P^k_p, P'^k_p sont des fonctions paires ou impaires de p en même temps que k est lui-même pair ou impair, il est clair que l'on peut écrire en résumé

$$y_{n+p} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_i P^{2i}_p \quad \delta^{2i} y_n \\ \sum_i P'^{2i}_p \mu\delta^{2i} y_n \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \sum_i P^{2i+1}_p \quad \delta^{2i+1} y_n \\ \sum_i P'^{2i+1}_p \mu\delta^{2i+1} y_n \end{array} \right\},$$

avec la faculté de combiner une ligne quelconque de la première accolade avec une ligne quelconque de la seconde.

En prenant

$$y_{n+p} = \sum_i P^{2i}_p \delta^{2i} y_n + \sum_i P'^{2i+1}_p \mu\delta^{2i+1} y_n,$$

on a la formule de Stirling, qui exprime $y_n + p$ avec y_n et les quantités de même indice du tableau Θ.

En changeant n en $n + \frac{1}{2}$ et prenant au contraire

$$y_{n+p+\frac{1}{2}} = \sum_i P'^{2i}_p \mu\delta^{2i} y_{n+\frac{1}{2}} + \sum_i P^{2i+1}_p \delta^{2i+1} y_{n+\frac{1}{2}},$$

on obtient la formule de Bessel, où figurent les quantités du tableau Θ situées sur la ligne d'indice $n + \frac{1}{2}$, à partir de $\mu y_{n+\frac{1}{2}}$.

En particulier, pour $p = 0$, il vient

$$y_{n+\frac{1}{2}} = \mu y_{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2.4} \mu\delta^2 y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{1.9}{2.4.6.8} \mu\delta^4 y_{n+\frac{1}{2}}$$
$$- \frac{1.9.25}{2.4.6.8.10.12} \mu\delta^6 y_{n+\frac{1}{2}} + \ldots;$$

c'est la formule d'interpolation pour la valeur $x_{n+\frac{1}{2}}$, moyenne

entre x_n et x_{n+1} : les coefficients numériques

$$1, \quad -\frac{1}{8}, \quad \frac{3}{128}, \quad -\frac{5}{1024}, \quad \ldots$$

sont ceux du développement de

$$\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

En adoptant le même mode de calcul symbolique que précédemment, on voit que toutes les formules précédentes dérivent des deux équations fondamentales

$$y=\left(\frac{\delta}{2}+\sqrt{1+\frac{\delta^2}{4}}\right)^2, \qquad \mu=\sqrt{1+\frac{\delta^2}{4}},$$

équivalentes elles-mêmes à

$$\delta=y^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}}, \qquad \mu=\frac{1}{2}\left(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}\right).$$

En combinant convenablement ces équations, on obtiendra toutes les relations possibles entre les $\delta^k y_s$ et $\mu\delta^k y_s$.

60. Entre les différences ou sommes de la fonction $f(x)$ et ses dérivées ou intégrales, il existe des relations de la plus haute importance que nous allons maintenant étudier.

Désignons par $\mathrm{D}f(x)$ la dérivée de $f(x)$, et généralement par $\mathrm{D}^k f(x)$ sa dérivée d'ordre k : quand $f(x)$ est un polynome de degré m, sa dérivée d'ordre m est une constante, et les suivantes sont nulles.

De même $\mathrm{D}^{-1}f(x)$ sera une fonction primitive de $f(x)$, c'est-à-dire l'intégrale indéfinie $\int^x f(x)\,dx$, déterminée seulement à une constante près; $\mathrm{D}^{-2}f(x)$ sera une fonction primitive de $\mathrm{D}^{-1}f(x)$, c'est-à-dire l'intégrale seconde $\int^x dx \int^x f(x)\,dx$, ou $\int\int^x f(x)\,dx^2$; etc.

Pour définir complètement ces fonctions, il suffit de donner arbitrairement des limites inférieures aux intégrales.

La formule de Taylor, qui donne

$$y_{n+p} = y_n + \frac{ph}{1} D y_n + \frac{p^2 h^2}{1.2} D^2 y_n + \frac{p^3 h^3}{1.2.3} D^3 y_n + \ldots,$$

peut s'écrire symboliquement sous la forme simple

$$y^{n+p} = y^n e^{phD},$$

en désignant par e la base des logarithmes hyperboliques, et en convenant généralement, dans les mêmes conditions que plus haut, de remplacer le produit $D^k y^s$ par la dérivée $D^k y_s$. Cette équation symbolique peut être multipliée par une puissance quelconque de y ou de D, l'exposant étant entier quand il s'agit de D; elle se réduit d'ailleurs simplement à la relation

$$y = e^{hD}.$$

En revenant maintenant à l'opération de différence, il est clair que les opérations de caractéristiques D et Δ (ou δ) peuvent être combinées entre elles d'une façon quelconque, et sont commutatives; toutes les relations que nous cherchons dériveront simplement de la transformation des égalités fondamentales

$$y = e^{hD} = 1 + \Delta,$$

en remplaçant ensuite les produits $D^k \Delta^q y^s$ par les quantités $D^k \Delta^q y_s$.

De même, si l'on emploie la caractéristique δ au lieu de Δ, on aura

$$y = e^{hD} = \left(\frac{\delta}{2} + \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4}}\right)^2,$$

et l'on peut y joindre, s'il y a lieu, l'égalité

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4}}.$$

Les formules que nous obtiendrons se présenteront sous forme de séries qui se limitent d'elles-mêmes si $f(x)$ est un polynome, et qui, dans le cas contraire, doivent être interprétées et utilisées comme nous l'avons déjà dit.

Pour éviter toute difficulté provenant de l'indétermination des sommes finies comme des fonctions primitives de $f(x)$, il faut observer qu'en supposant le choix de ces fonctions fixé, il suffira de remplacer les quantités $D^{-1}y_p$, $D^{-2}y_p$, ... dans les formules qui les contiennent, par

$$\int^{x_p} y\,dx + C_1 h, \quad \int^{x_p} dx \int^{x} y\,dx + (C_1 p + C_2) h^2, \quad \ldots,$$

les intégrales ayant les limites inférieures adoptées, sans qu'il soit utile de les écrire, et C_1, C_2, ... étant des constantes déterminées par les choix qui ont été faits. Ces formules en effet ne peuvent être exactes qu'à un certain polynome près en x, ou en p, dont le degré dépend de l'ordre des intégrales qui y figurent.

En appliquant les règles précédentes, cherchons d'abord l'expression des différences (ou sommes) $\Delta^k y_{n+p}$ à l'aide des dérivées (ou intégrales) $D^q y_n$. Il suffit à cet effet d'écrire

$$\Delta^k y^{n+p} = y^n e^{phD}(e^{hD} - 1)^k,$$

et de développer le second membre suivant les puissances de D.

En faisant

$$(e^x - 1)^k = G_k^k x^k + G_k^{k+1} x^{k+1} + G_k^{k+2} x^{k+2} + \ldots,$$

et multipliant ce développement par celui de e^{px},

$$e^{px} = 1 + \frac{px}{1} + \frac{p^2 x^2}{1.2} + \frac{p^3 x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

on obtient immédiatement le résultat cherché sous la forme

$$\Delta^k y_{n+p} = G_k^k(p) h^k D^k y_n + G_k^{k+1}(p) h^{k+1} D^{k+1} y_n + G_k^{k+2}(p) h^{k+2} D^{k+2} y_n + \ldots,$$

avec

$$G_k^k(p) = G_k^k,$$

$$G_k^{k+1}(p) = G_k^{k+1} + \frac{p}{1} G_k^k,$$

$$G_k^{k+2}(p) = G_k^{k+2} + \frac{p}{1} G_k^{k+1} + \frac{p^2}{1.2} G_k^k,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et ceci justifie ce que nous avons dit précédemment sur la décroissance rapide des termes de la formule de Newton, si l'on admet, comme nous le supposons en effet, qu'il en est ainsi de ceux de la formule de Taylor.

On peut écrire aussi

$$\Delta^k y^{n+p-k} = y^n e^{phD}(1 - e^{-hD})^k;$$

on obtient donc $\Delta^k y_{n+p-k}$ par la même formule que ci-dessus, à la condition de multiplier par $(-1)^k$ et de changer le signe de p et de D; plus simplement, il suffira donc de changer le signe des coefficients G_k^q pour lesquels la différence $q - k$ est impaire, de sorte que

$$\Delta^k y_{n+p-k} = G_k'^k(p) h^k D^k y_n + G_k'^{k+1}(p) h^{k+1} D^{k+1} y_n + \ldots,$$

avec

$$G_k'^k \quad (p) = \quad G_k^k,$$

$$G_k'^{k+1}(p) = - G_k^{k+1} + \frac{p}{1} G_k^k,$$

$$G_k'^{k+2}(p) = \quad G_k^{k+2} - \frac{p}{1} G_k^{k+1} + \frac{p^2}{1.2} G_k^k,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Au point de vue du calcul, il convient de supposer dans ces formules, comme dans celles qui suivront, n entier et p inférieur à 1, ou même au plus égal à $\frac{1}{2}$, en valeur absolue.

Sans insister ici sur l'expression générale des coefficients G_k^q et sur leurs propriétés diverses, remarquons seulement que l'on a

$$G_k^k = 1, \quad G_1^q = \frac{1}{1.2.3\ldots q},$$

et que l'égalité

$$\frac{d}{dx}(e^x - 1)^k = k(e^x - 1)^k + k(e^x - 1)^{k-1}$$

donne la relation de récurrence

$$q G_k^q = k(G_k^{q-1} + G_{k-1}^{q-1}).$$

Pour k positif, on obtient ainsi, en allant au delà des valeurs

nécessaires dans la pratique courante :

$$G_1^1=1,\quad G_1^2=\frac{1}{2},\quad G_1^3=\frac{1}{6},\quad G_1^4=\frac{1}{24},\quad G_1^5=\frac{1}{120},\quad G_1^6=\frac{1}{720},\quad G_1^7=\frac{1}{5040},$$

$$G_2^2=1,\quad G_2^3=1,\quad G_2^4=\frac{7}{12},\quad G_2^5=\frac{1}{4},\quad G_2^6=\frac{31}{360},\quad G_2^7=\frac{1}{40},$$

$$G_3^3=1,\quad G_3^4=\frac{3}{2},\quad G_3^5=\frac{5}{4},\quad G_3^6=\frac{3}{4},\quad G_3^7=\frac{43}{120},$$

$$G_4^4=1,\quad G_4^5=2,\quad G_4^6=\frac{13}{6},\quad G_4^7=\frac{5}{3},$$

$$G_5^5=1,\quad G_5^6=\frac{5}{2},\quad G_5^7=\frac{10}{3},$$

$$G_6^6=1,\quad G_6^7=3,$$

$$G_7^7=1.$$

Lorsqu'on prend k négatif, il suffit de supposer $k=-1$, et $k=-2$, car on ne rencontre pas d'autres applications dans la pratique.

Il faut développer d'abord la quantité $\frac{1}{e^x-1}$; or, on sait que, si l'on désigne par $B_1, B_2, B_3, \ldots$ les nombres de Bernoulli, on a

$$\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+B_1\frac{x}{1.2}-B_2\frac{x^3}{1.2.3.4}+B_3\frac{x^5}{1.2.3.4.5.6}-\ldots;$$

il vient donc

$$G_{-1}^{-1}=1,\quad G_{-1}^{0}=-\frac{1}{2},\quad G_{-1}^{1}=\frac{1}{12},\quad G_{-1}^{2}=0,\quad G_{-1}^{3}=-\frac{1}{720},\quad G_{-1}^{4}=0,$$

$$G_{-1}^{5}=\frac{1}{30\,240},\quad G_{-1}^{6}=0,\quad G_{-1}^{7}=\frac{-1}{1\,209\,600};$$

et par suite, d'après la formule de récurrence,

$$G_{-2}^{-2}=1,\quad G_{-2}^{-1}=-1,\quad G_{-2}^{0}=\frac{5}{12},\quad G_{-2}^{1}=-\frac{1}{12},$$

$$G_{-2}^{2}=\frac{1}{240},\quad G_{-2}^{3}=\frac{1}{720},\quad G_{-2}^{4}=-\frac{1}{6048},$$

$$G_{-2}^{5}=-\frac{1}{30\,240},\quad G_{-2}^{6}=\frac{1}{172\,800},\quad G_{-2}^{7}=\frac{1}{1\,209\,600}.$$

Les formules correspondantes deviennent alors d'une façon

précise

$$\Delta^{-1}y_{n+p} = C_1 + \frac{1}{h}\int^{x_n} y\,dx + G^0_{-1}(p)y_n + G^1_{-1}(p)h\,Dy_n + G^2_{-1}(p)h^2 D^2 y_n + \ldots,$$

$$\Delta^{-2}y_{n+p} = (n+p-1)C_1 + C_2 + \frac{1}{h^2}\int\int^{x_n} y\,dx^2 + (p-1)\frac{1}{h}\int^{x_n} y\,dx + G^0_{-2}(p)y_n + G^1_{-2}(p)h\,Dy_n + \ldots.$$

Donnons pour limite inférieure commune aux diverses intégrales la valeur x_0 de x; on a alors en particulier

$$\Delta^{-1}y_0 = \quad C_1 + G^0_{-1}y_0 + G^1_{-1}h\,Dy_0 + G^2_{-1}h^2 D^2 y_0 + \ldots,$$
$$\Delta^{-2}y_0 = C_2 - C_1 + G^0_{-2}y_0 + G^1_{-2}h\,Dy_0 + G^2_{-2}h^2 D^2 y_0 + \ldots,$$

et l'on peut, pour la commodité du calcul, choisir $\Delta^{-1}y_0$ et $\Delta^{-2}y_0$ de façon que les constantes C_1 et C_2 soient nulles.

On peut aussi bien écrire, si l'on préfère,

$$\Delta^{-1}y_{n+p+1} = C_1 + \frac{1}{h}\int^{x_n} y\,dx + G'^0_{-1}(p)y_n + G'^1_{-1}(p)h\,Dy_n + G'^2_{-1}(p)h^2 D^2 y_n + \ldots,$$

$$\Delta^{-2}y_{n+p+1} = (n+p+1)C_1 + C_2 + \frac{1}{h^2}\int\int^{x_n} y\,dx^2 + (p+1)\frac{1}{h}\int^{x_n} y\,dx + G'^0_{-2}(p)y_n + G'^1_{-2}(p)h\,Dy_n + \ldots.$$

En particulier, pour $p = 0$, et n entier positif, on a

$$\Delta^{-1}y_{n+1} - \Delta^{-1}y_0 = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_n$$
$$= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_n} y\,dx + \frac{1}{2}(y_n + y_0)$$
$$+ \frac{h}{12}(Dy_n - Dy_0) - \frac{h^3}{720}(D^3y_n - D^3y_0)$$
$$+ \frac{h^5}{30\,240}(D^5y_n - D^5y_0) - \frac{h^7}{1\,209\,600}(D^7y_n - D^7y_0) + \ldots;$$

c'est la formule sommatoire d'Euler ou de Mac-Laurin; quand la fonction $f(x)$ n'est pas un polynome, le second nombre est une série généralement divergente, mais que l'on peut cependant utiliser pour le calcul avec le plus grand avantage, comme nous l'avons dit.

Cette formule peut servir aussi bien à calculer les sommes finies que les intégrales définies; pour en montrer la valeur, faisons par exemple $y = \frac{1}{x}$, $h = 1$, $x_0 = 10$, $x_n = 20$; en désignant par L la caractéristique des logarithmes hyperboliques, on aura

$$\int_{10}^{20} y\,dx = \mathrm{L}2 = \frac{1}{20} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{19} + \frac{1}{40}$$
$$- \frac{1}{16 \times 10^2} + \frac{1}{128 \times 10^4} - \frac{1}{256 \times 10^6} + \ldots;$$

d'où, par un calcul rapide à neuf décimales,

$$\mathrm{L}2 = 0{,}693\,147\,180,$$

valeur exacte à moins d'une unité près du neuvième ordre décimal.

La façon même dont se présente la formule d'Euler met en évidence une observation que nous aurions déjà pu faire, et qu'il faut préciser, afin de mettre en garde contre de graves erreurs d'interprétation.

Si l'on suppose que la fonction y admette la période nh, la formule donne

$$y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_n} y\,dx,$$

ce qui est manifestement inexact, car le premier membre de cette égalité ne change pas si l'on vient à augmenter la fonction y d'une fonction arbitraire y', assujettie simplement à admettre la période h, et à s'annuler pour $x = x_0$. C'est qu'en effet le tableau T lui-même ne change en aucune façon, si l'on fait cette addition, de sorte que toutes les formules d'interpolation sont sujettes à la même objection, quelle que soit d'ailleurs la fonction y. Mais il faut ajouter aussitôt qu'une fonction telle que y' n'est plus du tout assimilable à un polynome, comme nous l'avons supposé essentiellement; car si par exemple on fait

$$y' = \sin\frac{2\pi(x - x_0)}{h},$$

on a, pour $x = x_0 + nh$,

$$y'_n = \sin 2\pi n,$$

et le développement de cette fonction suivant les puissances de n ne

répond pas aux conditions que nous nous sommes imposées. L'objection tombe donc d'elle-même, en retenant de là toutefois qu'il est indispensable de s'assurer que les susdites conditions sont bien vérifiées, si l'on veut légitimement appliquer les formules d'interpolation.

En revenant au cas particulier de la formule d'Euler lorsque y admet la période nh, on voit qu'elle ne diffère pas de la formule de quadrature que nous a donnée la théorie de l'interpolation périodique, à la condition de tenir compte de l'observation que nous venons de développer.

Occupons-nous maintenant du problème inverse, c'est-à-dire cherchons l'expression des dérivées (ou intégrales) $D^k y_{n+p}$ à l'aide des différences (ou sommes) $\Delta^q y_n$, ou encore $\Delta^q y_{n-q}$, qui sont avec y_n sur une même diagonale descendante ou ascendante du tableau T. Nous obtiendrons les formules dites de différentiation ou d'intégration mécanique, ou plutôt empirique. En suivant exactement la même marche, on part de l'égalité symbolique

$$hD = L(1+\Delta),$$

qui donne

$$h^k D^k y^{n+p} = y^n (1+\Delta)^p L^k(1+\Delta);$$

pour développer le second membre suivant les puissances de Δ et celles de p, observons que

$$(1+\Delta)^p = e^{p\,L(1+\Delta)} = 1 + \frac{p}{1} L(1+\Delta) + \frac{p^2}{1.2} L^2(1+\Delta) + \ldots;$$

par suite, faisant

$$L^k(1+x) = H_k^k x^k + H_k^{k+1} x^{k+1} + H_k^{k+2} x^{k+2} + \ldots,$$

il vient immédiatement

$$h^k D^k y_{n+p} = H_k^k(p) \Delta^k y_n + H_k^{k+1}(p) \Delta^{k+1} y_n + H_k^{k+2}(p) \Delta^{k+2} y_n + \ldots,$$

avec

$$H_k^k \ (p) = H_k^k,$$

$$H_k^{k+1}(p) = H_k^{k+1} + \frac{p}{1} H_{k+1}^{k+1},$$

$$H_k^{k+2}(p) = H_k^{k+2} + \frac{p}{1} H_{k+1}^{k+2} + \frac{p^2}{1.2} H_{k+2}^{k+2},$$

En observant maintenant que symboliquement

$$\frac{1}{y} = 1 - \frac{\Delta}{y},$$

on peut écrire aussi

$$h^k D^k y^{n+p} = y^n \left(1 - \frac{\Delta}{y}\right)^{-p} L^k \frac{1}{1 - \frac{\Delta}{y}},$$

et l'on obtient le développement de $h^k D^k y_{n+p}$ suivant les quantités $\Delta^q y_{n-q}$ en multipliant le second membre de la formule précédente par $(-1)^k$, et changeant le signe de p et de Δ; plus simplement il suffit de changer le signe des coefficients H_k^q pour lesquels la différence $q - k$ est impaire. Il vient ainsi

$$h^k D^k y_{n+p} = H_k'^k(p)\Delta^k y_{n-k} + H_k'^{k+1}(p)\Delta^{k+1} y_{n-k-1} + H_k'^{k+2}(p)\Delta^{k+2} y_{n-k-2} + \ldots,$$

avec

$$H_k'^k \quad (p) = \quad H_k^k,$$

$$H_k'^{k+1}(p) = -H_k^{k+1} + \frac{p}{1} H_{k+1}^{k+1},$$

$$H_k'^{k+2}(p) = \quad H_k^{k+2} - \frac{p}{1} H_{k+1}^{k+2} + \frac{p^2}{1.2} H_{k+2}^{k+2},$$

. . . .

Pour le calcul des coefficients H_k^q, on a

$$H_k^k = 1, \qquad H_1^q = \frac{(-1)^{q-1}}{q},$$

et la relation de récurrence

$$q H_k^q = k H_{k-1}^{q-1} - (q-1) H_k^{q-1}$$

résultant de l'égalité

$$(1 + x)\frac{d}{dx} L^k(1 + x) = k L^{k-1}(1 + x).$$

On a ainsi

$$\begin{array}{lllllll}
H_1^1 = 1, & H_1^2 = -\frac{1}{2}, & H_1^3 = \frac{1}{3}, & H_1^4 = -\frac{1}{4}, & H_1^5 = \frac{1}{5}, & H_1^6 = -\frac{1}{6}, & H_1^7 = \frac{1}{7}, \\
 & H_2^2 = 1, & H_2^3 = -1, & H_2^4 = \frac{11}{12}, & H_2^5 = -\frac{5}{6}, & H_2^6 = \frac{137}{180}, & H_2^7 = -\frac{7}{10}, \\
 & & H_3^3 = 1, & H_3^4 = -\frac{3}{2}, & H_3^5 = \frac{7}{4}, & H_3^6 = -\frac{15}{8}, & H_3^7 = \frac{29}{15}, \\
 & & & H_4^4 = 1, & H_4^5 = -2, & H_4^6 = \frac{17}{6}, & H_4^7 = -\frac{7}{2}, \\
 & & & & H_5^5 = 1, & H_5^6 = -\frac{5}{2}, & H_5^7 = \frac{25}{6}, \\
 & & & & & H_6^6 = 1, & H_6^7 = -3, \\
 & & & & & & H_7^7 = 1.
\end{array}$$

Pour $k = -1$, un calcul direct donne

$$H_{-1}^{-1} = 1, \quad H_{-1}^{0} = \frac{1}{2}, \quad H_{-1}^{1} = -\frac{1}{12}, \quad H_{-1}^{2} = \frac{1}{24},$$
$$H_{-1}^{3} = -\frac{19}{720}, \quad H_{-1}^{4} = \frac{3}{160}, \quad H_{-1}^{5} = -\frac{863}{60\,480},$$
$$H_{-1}^{6} = \frac{275}{24\,192}, \quad H_{-1}^{7} = -\frac{33\,953}{3\,628\,800},$$

et l'on en déduit pour $k = -2$, par la formule de récurrence,

$$H_{-2}^{-2} = 1, \quad H_{-2}^{-1} = 1, \quad H_{-2}^{0} = \frac{1}{12}, \quad H_{-2}^{1} = 0,$$
$$H_{-2}^{2} = -\frac{1}{240}, \quad H_{-2}^{3} = \frac{1}{240}, \quad H_{-2}^{4} = -\frac{221}{60\,480},$$
$$H_{-2}^{5} = \frac{19}{6048}, \quad H_{-2}^{6} = -\frac{9829}{3\,628\,800}, \quad H_{-2}^{7} = \frac{407}{172\,800}.$$

Les formules de quadrature empirique sont alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\int^{x_{n+p}} y\,dx
&= -C_1 + \Delta^{-1}y_n + H_{-1}^{0}(p)y_n + H_{-1}^{1}(p)\,\Delta y_n + H_{-1}^{2}(p)\,\Delta^2 y_n + \ldots \\
&= -C_1 + \Delta^{-1}y_{n+1} + H'^{0}_{-1}(p)y_n + H'^{1}_{-1}(p)\,\Delta y_{n-1} + H'^{2}_{-1}(p)\,\Delta^2 y_{n-2} + \ldots;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h^2}\int^{x_{n+p}} dx\int^{x} y\,dx &= -(n+p)\,C_1 - C_2 + \Delta^{-2}y_n + (p+1)\,\Delta^{-1}y_n \\
&\quad + H_{-2}^{0}(p)y_n + H_{-2}^{1}(p)\,\Delta y_n + H_{-2}^{2}(p)\,\Delta^2 y_n + \ldots \\
&= -(n+p)\,C_1 - C_2 + \Delta^{-2}y_{n+2} + (p-1)\,\Delta^{-1}y_{n+1} \\
&\quad + H'^{0}_{-2}(p)y_n + H'^{1}_{-2}(p)\,\Delta y_{n-1} + H'^{2}_{-2}(p)\,\Delta^2 y_{n-2} + \ldots;
\end{aligned}$$

si comme précédemment les diverses intégrales ont pour limite inférieure commune x_0, les constantes C_1 et C_2, qui sont toujours les mêmes, vérifient les relations

$$C_1 = \Delta^{-1}y_0 + H^0_{-1}y_0 + H^1_{-1}\Delta y_0 + H^2_{-1}\Delta^2 y_0 + \ldots,$$
$$C_2 = \Delta^{-2}y_0 + \Delta^{-1}y_0 + H^0_{-2}y_0 + H^1_{-2}\Delta y_0 + H^2_{-2}\Delta^2 y_0 + \ldots;$$

par un choix convenable de $\Delta^{-1}y_0$ et $\Delta^{-2}y_0$, on pourra faire en sorte que, pour simplifier les calculs, $C_1 = C_2 = 0$.

En particulier, pour $p = 0$ et n entier positif, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_n} y\,dx = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_n - \frac{1}{2}(y_0 + y_n) &- \frac{1}{12}(\Delta y_{n-1} - \Delta y_0)\\ &- \frac{1}{24}(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0)\\ &- \frac{19}{720}(\Delta^3 y_{n-3} - \Delta^3 y_0)\\ &- \frac{3}{160}(\Delta^4 y_{n-4} + \Delta^4 y_0)\\ &- \frac{863}{60480}(\Delta^5 y_{n-5} - \Delta^5 y_0)\\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

et cette formule, arrêtée au terme en $\Delta^n y_0$, ne diffère pas de la formule de quadrature de Côtes, le second membre étant une fonction linéaire et homogène de $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

61. L'introduction des caractéristiques δ et μ permet de résoudre les mêmes problèmes avec des formules plus élégantes et plus avantageuses pour le calcul numérique.

Cherchons d'abord les expressions des quantités $\delta^k y_{n+p}$ et $\mu\delta^k y_{n+p}$ en fonction des dérivées (ou intégrales) $D^q y_n$. Comme on a symboliquement

$$\delta = y^{\frac{1}{2}} - y^{-\frac{1}{2}},$$

il suffit de partir de la formule

$$\delta^k y^{n+p} = y^n e^{phD}\left(e^{\frac{hD}{2}} - e^{-\frac{hD}{2}}\right)^k.$$

Faisant donc

$$\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^k = M_k^k x^k + M_k^{k+2} x^{k+2} + M_k^{k+4} x^{k+4} + \ldots,$$

on a immédiatement

$$\delta^k y_{n+p} = M_k^k(p) h^k D^k y_n + M_k^{k+1}(p) h^{k+1} D^{k+1} y_n + M_k^{k+2}(p) h^{k+2} D^{k+2} y_n + \ldots,$$

avec

$$M_k^k(p) = M_k^k, \qquad M_k^{k+1}(p) = \frac{p}{1} M_k^k,$$

$$M_k^{k+2}(p) = M_k^{k+2} + \frac{p^2}{1.2} M_k^k, \qquad M_k^{k+3}(p) = \frac{p}{1} M_k^{k+2} + \frac{p^3}{1.2.3} M_k^k,$$

$$\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots.$$

Pour avoir maintenant le développement de $\mu\delta^k y_{n+p}$, il suffit de multiplier symboliquement par μ, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{hD}{2}} + e^{-\frac{hD}{2}}\right)$. En

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^k = M_k'^k x^k + M_k'^{k+2} x^{k+2} + M_k'^{k+4} x^{k+4} + \ldots,$$

on a donc

$$\mu\delta^k y_{n+p} = M_k'^k(p) h^k D^k y_n + M_k'^{k+1}(p) h^{k+1} D^{k+1} y_n + M_k'^{k+2}(p) h^{k+2} D^{k+2} y_n + \ldots\ldots\ldots,$$

avec

$$M_k'^k(p) = M_k'^k, \qquad M_k'^{k+1}(p) = \frac{p}{1} M_k^k,$$

$$M_k'^{k+2}(p) = M_k'^{k+2} + \frac{p^2}{1.2} M_k'^k, \qquad M_k'^{k+3}(p) = \frac{p}{1} M_k'^{k+2} + \frac{p^3}{1.2.3} M_k'^k,$$

$$\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots.$$

Dans ces formules, comme dans les suivantes, on pourra supposer n entier ou multiple impair de $\frac{1}{2}$, et réduire alors p à être au plus égal à $\frac{1}{4}$ en valeur absolue.

On a

$$M_k^k = M_k'^k = 1, \qquad M_1^{2q+1} = \frac{1}{4.6.8\ldots(4q+2)},$$

$$M_0'^{2q} = \frac{1}{2.4.6\ldots(2q)}, \qquad M_1'^{2q+1} = \frac{1}{1.2.3\ldots(2q+1)};$$

de plus, les égalités

$$\frac{d(\delta^k)}{dx} = k\mu\delta^{k-1}, \qquad \frac{d^2(\delta^k)}{dx^2} = \frac{k^2}{4}\delta^k + k(k-1)\delta^{k-2},$$

posant de même

où l'on a fait pour abréger

$$\delta = e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}, \qquad \mu = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right),$$

donnent les relations de récurrence

$$q(q-1)M_k^q = \frac{k^2}{4} M_k^{q-2} + k(k-1)M_{k-2}^{q-2}, \qquad M_k'^q = \frac{q+1}{k+1} M_{k+1}^{q+1};$$

enfin, pour $k = -1$, un calcul direct donne les coefficients M_{-1}^q, tandis que les $M_{-1}'^q$ sont égaux aux G_{-1}^q du numéro précédent, et les M_{-2}^q résultent encore d'un calcul direct.

Il vient ainsi :

$$M_1^1 = 1, \quad M_1^3 = \frac{1}{24}, \quad M_1^5 = \frac{1}{1920}, \quad M_1^7 = \frac{1}{322\,560};$$

$$M_2^2 = 1, \quad M_2^4 = \frac{1}{12}, \quad M_2^6 = \frac{1}{360};$$

$$M_3^3 = 1, \quad M_3^5 = \frac{1}{8}, \quad M_3^7 = \frac{13}{1920};$$

$$M_4^4 = 1, \quad M_4^6 = \frac{1}{6}; \quad M_5^5 = 1, \quad M_5^7 = \frac{5}{24};$$

$$M_6^6 = 1; \quad M_7^7 = 1;$$

$$M_0'^0 = 1, \quad M_0'^2 = \frac{1}{8}, \quad M_0'^4 = \frac{1}{384}, \quad M_0'^6 = \frac{1}{46\,080};$$

$$M_1'^1 = 1, \quad M_1'^3 = \frac{1}{6}, \quad M_1'^5 = \frac{1}{120}, \quad M_1'^7 = \frac{1}{5040};$$

$$M_2'^2 = 1, \quad M_2'^4 = \frac{5}{24}, \quad M_2'^6 = \frac{91}{5760};$$

$$M_3'^3 = 1, \quad M_3'^5 = \frac{1}{4}, \quad M_3'^7 = \frac{1}{40};$$

$$M_4'^4 = 1, \quad M_4'^6 = \frac{7}{24}; \quad M_5'^5 = 1, \quad M_5'^7 = \frac{1}{3};$$

$$M_6'^6 = 1; \quad M_7'^7 = 1;$$

puis

$$M_{-1}^{-1} = 1, \quad M_{-1}^1 = -\frac{1}{24}, \quad M_{-1}^3 = \frac{7}{5760}, \quad M_{-1}^5 = -\frac{31}{967\,680}, \quad M_{-1}^7 = \frac{127}{154\,828\,800};$$

$$M_{-2}^{-2} = 1, \quad M_{-2}^0 = -\frac{1}{12}, \quad M_{-2}^2 = \frac{1}{240}, \quad M_{-2}^4 = -\frac{1}{6048}, \quad M_{-2}^6 = \frac{1}{172\,800};$$

$$M_{-1}'^{-1} = 1, \quad M_{-1}'^1 = \frac{1}{12}, \quad M_{-1}'^3 = -\frac{1}{720}, \quad M_{-1}'^5 = \frac{1}{30\,240}, \quad M_{-1}'^7 = -\frac{1}{1\,209\,600};$$

$$M_{-2}'^{-2} = 1, \quad M_{-2}'^0 = \frac{1}{24}, \quad M_{-2}'^2 = -\frac{7}{1920}, \quad M_{-2}'^4 = \frac{31}{193\,536}, \quad M_{-2}'^6 = -\frac{127}{22\,118\,400}.$$

Les formules relatives aux sommes sont :

$$\delta^{-1} y_{n+p} = C_1 + \frac{1}{h}\int^{x_n} y\,dx + M^0_{-1}(p) y_n + M^1_{-1}(p) h\, D y_n + M^2_{-1}(p) h^2 D^2 y_n + \ldots\ldots,$$

$$\mu\delta^{-1} y_{n+p} = C_1 + \frac{1}{h}\int^{x_n} y\,dx + M'^0_{-1}(p) y_n + M'^1_{-1}(p) h\, D y_n + M'^2_{-1}(p) h^2 D^2 y_n + \ldots\ldots$$

$$\delta^{-2} y_{n+p} = (n+p)C_1 + C_2 + \frac{1}{h^2}\int\int^{x_n} y\,dx^2 + p\frac{1}{h}\int^{x_n} y\,dx + M^0_{-2}(p) y_n + M^1_{-2}(p) h D y_n + \ldots,$$

$$\mu\delta^{-2} y_{n+p} = (n+p)C_1 + C_2 + \frac{1}{h^2}\int\int^{x_n} y\,dx^2 + p\frac{1}{h}\int^{x_n} y\,dx + M'^0_{-2}(p) y_n + M'^1_{-2}(p) h D y_n + \ldots.$$

Si les intégrales ont pour limite inférieure commune x_i, i étant pris généralement égal à o ou à $-\frac{1}{2}$, on a en particulier, pour la détermination des constantes ou des sommes initiales,

$$\delta^{-1} y_i = C_1 + M^1_{-1}\, h\, D y_i + M^3_{-1}\, h^3 D^3 y_i + \ldots,$$
$$\mu\delta^{-1} y_i = C_1 + M'^1_{-1}\, h\, D y_i + M'^3_{-1}\, h^3 D^3 y_i + \ldots.$$
$$\delta^{-2} y_i = i C_1 + C_2 + M^0_{2}\, y_i + M^2_{-2} D^2 y_i + \ldots.$$
$$\mu\delta^{-2} y_i = i C_1 + C_2 + M'^0_{-2} y_i + M'^2_{-2} D^2 y_i + \ldots.$$

En supposant n entier, $i = 0$, $p = 0$, on retrouve la formule d'Euler en calculant $\mu\delta^{-1} y_n$.

En remplaçant n par $n + \frac{1}{2}$, n étant toujours entier, et prenant $i = -\frac{1}{2}$, $p = 0$, on a une formule équivalente en calculant $\delta^{-1} y_{n+\frac{1}{2}}$:

$$y_0 + y_1 + \ldots + y_n = \frac{1}{h}\int_{x_{-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} y\,dx - \frac{h}{24}\left(D y_{n+\frac{1}{2}} - D y_{-\frac{1}{2}}\right) + \frac{7h^3}{5760}\left(D^3 y_{n+\frac{1}{2}} - D^3 y_{-\frac{1}{2}}\right) - \frac{31 h^5}{967\,680}\left(D^5 y_{n+\frac{1}{2}} - D^5 y_{-\frac{1}{2}}\right) + \frac{127 h^7}{154\,828\,800}\left(D^7 y_{n+\frac{1}{2}} - D^7 y_{-\frac{1}{2}}\right) + \ldots\ldots$$

Déterminons enfin les valeurs des fonctions $D^k y_{n+p}$ en fonction des $\delta^q y_n$ ou $\mu\,\delta^q y_n$. On a

$$h^k D^k y^{n+p} = y^n\left(\frac{\delta}{2}+\sqrt{1+\frac{\delta^2}{4}}\right)^{2p} L^k\left(\frac{\delta}{2}+\sqrt{1+\frac{\delta^2}{4}}\right)^2;$$

il en résulte comme précédemment, en faisant

$$L^k\left(\frac{x}{2}+\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}\right)^2 = N_k^k x^k + N_k^{k+2} x^{k+2} + N_k^{k+4} x^{k+4} + \ldots$$

(car ce développement ne contient que les puissances de même parité de x), que l'on a

$$h^k D^k y_{n+p} = N_k^k(p)\,\delta^k y_n + N_k^{k+1}(p)\,\delta^{k+1} y_n + N_k^{k+2}(p)\,\delta^{k+2} y_n + \ldots,$$

avec

$$N_k^k\;(p) = N_k^k, \qquad N_k^{k+1}(p) = \frac{p}{1} N_{k+1}^{k+1},$$

$$N_k^{k+2}(p) = N_k^{k+2} + \frac{p^2}{1.2} N_{k+2}^{k+2}, \qquad N_k^{k+3}(p) = \frac{p}{1} N_{k+1}^{k+3} + \frac{p^3}{1.2.3} N_{k+3}^{k+3},$$

De même, en faisant

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}} L^k\left(\frac{x}{2}+\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}\right)^k = N_k'^k x^k + N_k'^{k+2} x^{k+2} + N_k'^{k+4} x^{k+4} + \ldots,$$

on a

$$h^k D^k y_{n+p} = N_k'^k(p)\,\mu\,\delta^k y_n + N_k'^{k+1}(p)\,\mu\,\delta^{k+1} y_n + N_k'^{k+2}(p)\,\mu\,\delta^{k+2} y_n + \ldots,$$

avec

$$N_k'^k\;(p) = N_k'^k, \qquad N_k'^{k+1}(p) = \frac{p}{1} N_{k+1}'^{k+1},$$

$$N_k'^{k+2}(p) = N_k'^{k+2} + \frac{p^2}{1.2} N_{k+2}'^{k+2}, \qquad N_k'^{k+3}(p) = \frac{p}{1} N_{k+1}'^{k+3} + \frac{p^3}{1.2.3} N_{k+3}'^{k+3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

il convient alors de réunir ces deux formules en une seule en écrivant

comme nous l'avons déjà fait

$$h^k D^k y_{n+p} = \left\{ \begin{array}{l} N_k^k \ (p) \ \delta^k \ y_n + N_k^{k+2} (p) \ \delta^{k+2} y_n + N_k^{k+4} (p) \ \delta^{k+4} y_n + \ldots \\ N_k'^k \ (p) \mu \delta^k \ y_n + N_k'^{k+2} (p) \mu \delta^{k+2} y_n + N_k'^{k+4} (p) \mu \delta^{k+4} y_n + \ldots \end{array} \right\}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} N_k^{k+1} (p) \ \delta^{k+1} y_n + N_k^{k+3} (p) \ \delta^{k+3} y_n + N_k^{k+5} (p) \ \delta^{k+5} y_n + \ldots \\ + N_k'^{k+1} (p) \mu \delta^{k+1} y_n + N_k'^{k+3} (p) \mu \delta^{k+3} y_n + N_k'^{k+5} (p) \mu \delta^{k+5} y_n + \ldots \end{array} \right\},$$

une ligne quelconque de la première accolade pouvant être combinée avec une ligne quelconque de la seconde.

Si n est entier, on prendra la première ligne de la première accolade avec la dernière de la seconde si k est pair; et si k est impair, on associera la seconde ligne de la première accolade et la première ligne de la seconde. Si n est remplacé par $n + \frac{1}{2}$, avec une valeur entière pour ce nouvel n, on fera le contraire. De cette façon on exprime toujours $h^k D^k y_{n+p}$ ou $h^k D^k y_{n+\frac{1}{2}+p}$ à l'aide des quantités d'indice n ou d'indice $n + \frac{1}{2}$, situées sur une même ligne du tableau Θ. On peut toujours, dans ces conditions, supposer p au plus égal à $\frac{1}{4}$ en valeur absolue.

On a

$$N_k^k = N_k'^k = 1; \qquad N_0'^{2q} = (-1)^q \frac{1.3.5\ldots(2q-1)}{8.16.24\ldots(8q)};$$

de plus, les égalités

$$\mu \frac{d(\alpha^k)}{dx} = k\alpha^{k-1}, \qquad \left(1 + \frac{x^2}{4}\right) \frac{d^2(\alpha^k)}{dx^2} + \frac{x}{4} \frac{d(\alpha^k)}{dx} = k(k-1)\alpha^{k-2},$$

où l'on a fait pour abréger

$$\alpha = \mathrm{L}\left(\frac{x}{2} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}\right)^2, \qquad \mu = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}},$$

donnent les relations de récurrence

$$q(q-1)N_k^q = -\frac{(q-2)^2}{4} N_k^{q-2} + k(k-1)N_{k-2}^{q-2},$$

$$N_k'^q = \frac{q+1}{k+1} N_{k+1}^{q+1};$$

enfin les coefficients N_{-1}^q, N_{-2}^q, $N_{-1}'^q$ sont obtenus par un calcul

direct, et l'on a ainsi

$$N_1^1 = 1, \quad N_1^3 = -\frac{1}{24}, \quad N_1^5 = \frac{3}{640}, \quad N_1^7 = -\frac{5}{7168};$$
$$N_2^2 = 1, \quad N_2^4 = -\frac{1}{12}, \quad N_2^6 = \frac{1}{90};$$
$$N_3^3 = 1, \quad N_3^5 = -\frac{1}{8}, \quad N_3^7 = \frac{37}{1920};$$
$$N_4^4 = 1, \quad N_4^6 = -\frac{1}{6}; \quad N_5^5 = 1, \quad N_5^7 = -\frac{5}{24}; \quad N_6^6 = 1; \quad N_7^7 = 1;$$

$$N_0'^0 = 1, \quad N_0'^2 = -\frac{1}{8}, \quad N_0'^4 = \frac{3}{128}, \quad N_0'^6 = -\frac{5}{1024};$$
$$N_1'^1 = 1, \quad N_1'^3 = -\frac{1}{6}, \quad N_1'^5 = \frac{1}{30}, \quad N_1'^7 = -\frac{1}{140};$$
$$N_2'^2 = 1, \quad N_2'^4 = -\frac{5}{24}, \quad N_2'^6 = \frac{259}{5760};$$
$$N_3'^3 = 1, \quad N_3'^5 = -\frac{1}{4}, \quad N_3'^7 = \frac{7}{120};$$
$$N_4'^4 = 1, \quad N_4'^6 = -\frac{7}{24}; \quad N_5'^5 = 1, \quad N_5'^7 = -\frac{1}{3}; \quad N_6'^6 = 1; \quad N_7'^7 = 1;$$

puis

$$N_{-1}^{-1} = 1, \quad N_{-1}^{1} = \frac{1}{24}, \quad N_{-1}^{3} = -\frac{17}{5760}, \quad N_{-1}^{5} = \frac{367}{967\,680}, \quad N_{-1}^{7} = -\frac{27\,859}{464\,486\,400};$$
$$N_{-2}^{-2} = 1, \quad N_{-2}^{0} = \frac{1}{12}, \quad N_{-2}^{2} = -\frac{1}{240}, \quad N_{-2}^{4} = \frac{31}{60\,480}, \quad N_{-2}^{6} = -\frac{289}{3\,628\,800};$$
$$N_{-1}'^{-1} = 1, \quad N_{-1}'^{1} = -\frac{1}{12}, \quad N_{-1}'^{3} = \frac{11}{720}, \quad N_{-1}'^{5} = -\frac{191}{60\,480}, \quad N_{-1}'^{7} = \frac{2497}{3\,628\,800};$$
$$N_{-2}'^{-2} = 1, \quad N_{-2}'^{0} = -\frac{1}{24}, \quad N_{-2}'^{2} = \frac{17}{1920}, \quad N_{-2}'^{4} = -\frac{367}{193\,536}, \quad N_{-2}'^{6} = \frac{27\,859}{66\,355\,200}.$$

Les formules de quadrature empirique sont alors

$$\frac{1}{h}\int^{x_{n+p}} y\,dx = -C_1 + \left\{\begin{array}{l} \delta^{-1}y_n + N_{-1}^{1}(p)\,\delta y_n + N_{-1}^{3}(p)\,\delta^3 y_n + \ldots \\ \mu\,\delta^{-1}y_n + N_{-1}'^{1}(p)\,\mu\,\delta y_n + N_{-1}'^{3}(p)\,\mu\,\delta^3 y_n + \ldots \end{array}\right\}$$
$$+ \left\{\begin{array}{l} N_{-1}^{0}(p)\,y_n + N_{-1}^{2}(p)\,\delta^2 y_n + \ldots \\ N_{-1}'^{0}(p)\,\mu\,y_n + N_{-1}'^{2}(p)\,\mu\,\delta^2 y_n + \ldots \end{array}\right\};$$

$$\frac{1}{h^2}\int^{x_{n+p}} dx \int^{x} y\,dx$$
$$= -(n+p)\,C_1 - C_2 + \left\{\begin{array}{l} \delta^{-2}y_n + N_{-2}^{0}(p)\,y_n + N_{-2}^{2}(p)\,\delta^2 y_n + \ldots \\ \mu\,\delta^{-2}y_n + N_{-2}'^{0}(p)\,\mu\,y_n + N_{-2}'^{2}(p)\,\mu\,\delta^2 y_n + \ldots \end{array}\right\}$$
$$+ \left\{\begin{array}{l} p\,\delta^{-1}y_n + N_{-2}^{1}(p)\,\delta y_n + N_{-2}^{3}(p)\,\delta^3 y_n + \ldots \\ + p\,\mu\,\delta^{-1}y_n + N_{-2}'^{1}(p)\,\mu\,\delta y_n + N_{-2}'^{3}(p)\,\mu\,\delta^3 y_n + \ldots \end{array}\right\};$$

si p est nul, la seconde accolade disparaît dans chacune de ces formules.

Pour déterminer les sommes ou constantes initiales, on a, si x_i est la limite inférieure commune des intégrales,

$$C_1 = \left\{ \begin{matrix} \delta^{-1} y_i + N^1_{-1} \ \delta y_i + N^3_{-1} \ \delta^3 y_i + \ldots \\ \mu \delta^{-1} y_i + N'^1_{-1} \mu \delta y_i + N'^3_{-1} \mu \delta^3 y_i + \ldots \end{matrix} \right\},$$

$$i C_1 + C_2 = \left\{ \begin{matrix} \delta^{-2} y_i + N^0_{-2} \ \ y_i + N^2_{-2} \ \delta^2 y_i + \ldots \\ \mu \delta^{-2} y_i + N'^0_{-2} \mu \ y_i + N'^2_{-2} \mu \delta^2 y_i + \ldots \end{matrix} \right\}.$$

Si l'on suppose $i = 0$ ou $i = -\frac{1}{2}$, on se servira de la ligne convenable dans chacune des accolades de ces diverses formules, suivant le cas.

En particulier, on voit que l'on peut écrire en faisant $n = 0$ ou $n = -\frac{1}{2}$, et remplaçant p par n :

$$\frac{1}{2h} \int_{x_{-n}}^{x_n} y\, dx = N^0_{-1}(n) y_0 + N^2_{-1}(n)\, \delta^2 y_0 + N^4_{-1}(n)\, \delta^4 y_0 + \ldots,$$

$$\frac{1}{2h} \int_{x_{-n+\frac{1}{2}}}^{x_{n-\frac{1}{2}}} y\, dx = N'^0_{-1}(n)\, \mu y_{-\frac{1}{2}} + N'^2_{-1}(n)\, \mu \delta^2 y_{-\frac{1}{2}} + N'^4_{-1}(n)\, \mu \delta^4 y_{-\frac{1}{2}} + \ldots.$$

En supposant n entier dans la première de ces formules, ou bien en le supposant de la forme $n' + \frac{1}{2}$ dans la seconde avec n' entier, et en s'arrêtant au terme en $\delta^{2n} y_0$ ou en $\mu \delta^{2n'} y_{-\frac{1}{2}}$, on retrouve la formule générale de Cotes, puisque le second membre est fonction linéaire et homogène de $y_{-n}, y_{-n+1}, \ldots, y_0, \ldots, y_{n-1}, y_n$ ou bien de $y_{-n'-1}, y_{-n'}, \ldots, y_0, \ldots, y_{n'-1}, y_{n'}$.

En faisant les hypothèses inverses, et s'arrêtant alors au terme en $\delta^{2n'} y_0$ ou en $\mu \delta^{2n-2} y_{-\frac{1}{2}}$, on obtient une formule toute semblable, le second membre étant ici fonction linéaire et homogène de $y_{-n'}, y_{-n'+1}, \ldots, y_{n'-1}, y_{n'}$ ou bien de $y_{-n}, y_{-n+1}, \ldots, y_{n-1}$.

On a explicitement, pour les coefficients de ces formules :

$$N_{-1}^{0}(n) = n, \qquad N_{-1}'^{0}(n) = n,$$

$$N_{-1}^{2}(n) = \frac{n^3}{6}, \qquad N_{-1}'^{2}(n) = -\frac{n}{8} + \frac{n^3}{6},$$

$$N_{-1}^{4}(n) = -\frac{n^3}{72} + \frac{n^5}{120}, \qquad N_{-1}'^{4}(n) = \frac{3n}{128} - \frac{5n^3}{144} + \frac{n^5}{120},$$

$$N_{-1}^{6}(n) = \frac{n^3}{540} - \frac{n^5}{720} + \frac{n^7}{5040}, \qquad N_{-1}'^{6}(n) = -\frac{5n}{1024} + \frac{259n^3}{34560} - \frac{7n^5}{2880} + \frac{n^7}{5040},$$

. . . . , ...

62. Les méthodes du calcul des différences permettent encore l'intégration empirique de certaines équations différentielles, ainsi que nous allons l'expliquer en détail, en supposant qu'il s'agisse d'une équation du second ordre.

Soit u la fonction inconnue de x, définie par l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = f(x, z, u) = y,$$

où l'on a $z = \frac{du}{dx}$, et où f désigne une fonction donnée de x, z, u.

Comme précédemment, si x_0 est une valeur particulière de x, et h une quantité fixe (positive ou négative), nous ferons

$$x_n = x_0 + nh,$$

et nous appellerons y_n, z_n, u_n, les valeurs correspondantes de y, z, u. Supposons que pour $x = x_i$, i étant pris comme plus haut égal à 0 ou $-\frac{1}{2}$, on se donne les valeurs initiales z_i et u_i qui déterminent complètement les fonctions z et u, et faisons généralement

$$z = hz', \qquad u = h^2u';$$

on a par suite

$$z'_n = z'_i + \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_n} y\,dx, \qquad u'_n = u'_i + z'_i(n-i) + \frac{1}{h^2}\int_{x_i}^{x_n} dx \int_{x_i}^{x} y\,dx.$$

Imaginons alors formée la *table d'intégration*, c'est-à-dire un tableau tel que T ou Θ, pour les valeurs de n entières et positives (et aussi négatives, exceptionnellement), et soit à calculer les valeurs de z' et u' pour une valeur quelconque de x que l'on peut prendre

sous la forme x_{n+p}, ou $x_{n+p+\frac{1}{2}}$, n étant entier, et p désignant un nombre que l'on peut supposer pratiquement au plus égal à $\frac{1}{4}$ en valeur absolue. Il suffit d'appliquer les formules du numéro précédent, qui donnent sous une forme entièrement explicite généralement plus que suffisante, et en séparant les termes qui s'annulent avec p :

$$\begin{aligned} z'_{n+p} = {} & \mu\delta^{-1}y_n - \frac{1}{12}\mu\,\delta y_n + \frac{11}{720}\mu\delta^3 y_n - \frac{191}{60\,480}\mu\delta^5 y_n + \ldots \\ & + p y_n + \frac{p^2}{2}\mu\,\delta y_n + \frac{p^3}{6}\delta^2 y_n + \left(-\frac{p^2}{12} + \frac{p^4}{24}\right)\mu\delta^3 y_n \\ & + \left(-\frac{p^3}{72} + \frac{p^5}{120}\right)\delta^4 y_n + \left(\frac{p^2}{60} - \frac{p^4}{96} + \frac{p^6}{720}\right)\mu\delta^5 y_n + \ldots; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_{n+p+\frac{1}{2}} = {} & \delta^{-1}y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{24}\delta y_{n+\frac{1}{2}} - \frac{17}{5760}\delta^3 y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{367}{967\,680}\delta^5 y_{n+\frac{1}{2}} + \ldots \\ & + p\mu y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{p^2}{2}\delta y_{n+\frac{1}{2}} + \left(-\frac{p}{8} + \frac{p^3}{6}\right)\mu\delta^2 y_{n+\frac{1}{2}} \\ & + \left(-\frac{p^2}{48} + \frac{p^4}{24}\right)\delta^3 y_{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{3p}{128} - \frac{5p^3}{144} + \frac{p^5}{120}\right)\mu\delta^4 y_{n+\frac{1}{2}} \\ & + \left(\frac{3p^2}{1280} - \frac{p^4}{192} + \frac{p^6}{720}\right)\delta^5 y_{n+\frac{1}{2}} + \ldots; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'_{n+p} = {} & \delta^{-2}y_n + \frac{1}{12}y_n - \frac{1}{240}\delta^2 y_n + \frac{31}{60\,480}\delta^4 y_n + \ldots \\ & + p\mu\delta^{-1}y_n + \frac{p^2}{2}y_n + \left(-\frac{p}{12} + \frac{p^3}{6}\right)\mu\,\delta y_n + \frac{p^4}{24}\delta^2 y_n \\ & + \left(\frac{11p}{720} - \frac{p^3}{36} + \frac{p^5}{120}\right)\mu\delta^3 y_n + \left(-\frac{p^4}{288} + \frac{p^6}{720}\right)\delta^4 y_n \\ & + \left(-\frac{191p}{60\,480} + \frac{p^3}{180} - \frac{p^5}{480} + \frac{p^7}{5040}\right)\mu\delta^5 y_n + \ldots; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'_{n+p+\frac{1}{2}} = {} & \mu\delta^{-2}y_{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{24}\mu y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{17}{1920}\mu\delta^2 y_{n+\frac{1}{2}} - \frac{367}{193\,536}\mu\delta^4 y_{n+\frac{1}{2}} + \ldots \\ & + p\delta^{-1}y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{p^2}{2}\mu y_{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{p}{24} + \frac{p^3}{6}\right)\delta y_{n+\frac{1}{2}} \\ & + \left(-\frac{p^2}{16} + \frac{p^4}{24}\right)\mu\delta^2 y_{n+\frac{1}{2}} + \left(-\frac{17p}{5760} - \frac{p^3}{144} + \frac{p^5}{120}\right)\delta^3 y_{n+\frac{1}{2}} \\ & + \left(\frac{3p^2}{256} - \frac{5p^4}{576} + \frac{p^6}{720}\right)\mu\delta^4 y_{n+\frac{1}{2}} \\ & + \left(\frac{367p}{967\,680} + \frac{p^3}{1280} - \frac{p^5}{960} + \frac{p^7}{5040}\right)\delta^5 y_{n+\frac{1}{2}} + \ldots; \end{aligned}$$

ceci à la condition de déterminer les sommes finies initiales par les formules suivantes :

pour $i = 0$:

$$\Delta^{-1} y_0 = \delta^{-1} y_{-\frac{1}{2}} = z'_0 - \frac{1}{2} y_0 + \frac{1}{12} \mu \delta y_0 - \frac{11}{720} \mu \delta^3 y_0 + \frac{191}{60\,480} \mu \delta^5 y_0 + \ldots,$$

$$\Delta^{-2} y_1 = \delta^{-2} y_0 = u'_0 - \frac{1}{12} y_0 + \frac{1}{240} \delta^2 y_0 - \frac{31}{60\,480} \delta^4 y_0 + \ldots;$$

pour $i = -\frac{1}{2}$:

$$\Delta^{-1} y_0 = \delta^{-1} y_{-\frac{1}{2}} = z'_{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{24} \delta y_{-\frac{1}{2}} + \frac{17}{5760} \delta^3 y_{-\frac{1}{2}} - \frac{367}{967\,680} \delta^5 y_{-\frac{1}{2}} + \ldots,$$

$$\Delta^{-2} y_1 = \delta^{-2} y_0 = u'_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \delta^{-1} y_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{24} \mu y_{-\frac{1}{2}} - \frac{17}{1920} \mu \delta^2 y_{-\frac{1}{2}} + \frac{367}{193\,536} \mu \delta^4 y_{-\frac{1}{2}} + \ldots$$

Des tables appropriées, comme celles que l'on trouve dans le traité de Th. v. Oppolzer, peuvent faciliter le calcul des coefficients de ces formules.

Si le tableau T se trouvait limité à la diagonale ascendante qui contient n, ainsi qu'il arrive si la dernière valeur calculée de y est y_n, on aura encore, p étant pris pratiquement inférieur à $\frac{1}{2}$ en valeur absolue, les formules suivantes, moins avantageuses pour le calcul :

$$\begin{aligned} z'_{n+p} = {} & \Delta^{-1} y_{n+1} - \frac{1}{2} y_n - \frac{1}{12} \Delta y_{n-1} - \frac{1}{24} \Delta^2 y_{n-2} - \frac{19}{720} \Delta^3 y_{n-3} \\ & - \frac{3}{160} \Delta^4 y_{n-4} - \frac{863}{60\,480} \Delta^5 y_{n-5} + \ldots \\ & + p y_n + \frac{p^2}{2} \Delta y_{n-1} + \left(\frac{p^2}{4} + \frac{p^3}{6}\right) \Delta^2 y_{n-2} + \left(\frac{p^2}{6} + \frac{p^3}{6} + \frac{p^4}{24}\right) \Delta^3 y_{n-3} \\ & + \left(\frac{p^2}{8} + \frac{11 p^3}{72} + \frac{p^4}{16} + \frac{p^5}{120}\right) \Delta^4 y_{n-4} \\ & + \left(\frac{p^2}{10} + \frac{5 p^3}{36} + \frac{7 p^4}{96} + \frac{p^5}{60} + \frac{p^6}{720}\right) \Delta^5 y_{n-5} + \ldots, \end{aligned}$$

et

$$u'_{n+p} = \Delta^{-2} y_{n+1} + \frac{1}{12} y_n - \frac{1}{240} \Delta^2 y_{n-2} - \frac{1}{240} \Delta^3 y_{n-3}$$
$$- \frac{221}{60\,480} \Delta^4 y_{n-4} - \frac{19}{6048} \Delta^5 y_{n-5} - \ldots$$
$$+ p \Delta^{-1} y_{n+1} + \left(-\frac{p}{2} + \frac{p^2}{2}\right) y_n + \left(-\frac{p}{12} + \frac{p^3}{6}\right) \Delta y_{n-1}$$
$$+ \left(-\frac{p}{24} + \frac{p^3}{12} + \frac{p^4}{24}\right) \Delta^2 y_{n-2} + \left(-\frac{19p}{720} + \frac{p^3}{18} + \frac{p^4}{24} + \frac{p^5}{120}\right) \Delta^3 y_{n-3}$$
$$+ \left(-\frac{3p}{160} + \frac{p^3}{24} + \frac{11p^4}{288} + \frac{p^5}{80} + \frac{p^6}{720}\right) \Delta^4 y_{n-4}$$
$$+ \left(-\frac{863p}{60\,480} + \frac{p^3}{30} + \frac{5p^4}{144} + \frac{7p^5}{480} + \frac{p^6}{360} + \frac{p^7}{5040}\right) \Delta^5 y_{n-5} + \ldots$$

Quand la fonction y ne dépend que de x, c'est-à-dire quand il s'agit de simples quadratures, la construction de la table d'intégration ne demande aucune observation. Mais il n'en est pas de même s'il s'agit d'une véritable équation différentielle, y dépendant alors de z et u.

Pour construire la table dans ces conditions, il faut savoir premièrement la mettre en train, puis la continuer quand on est arrivé à un certain rang.

Examinons d'abord cette seconde question; la dernière valeur calculée pour y étant comme ci-dessus y_n, il faut, pour avancer d'un rang, déterminer $y_{n+1} = f(x_{n+1}, z_{n+1}, u_{n+1})$, et par suite connaître avec une exactitude suffisante z'_{n+1}, u'_{n+1}. On ne peut y arriver que par approximations successives, qu'il importe de réduire au minimum, pour le succès de la méthode.

Faisant $p = 1$ dans les dernières formules écrites, il vient

$$z'_{n+1} = \Delta^{-1} y_{n+1} + \frac{1}{2} y_n + \frac{5}{12} \Delta y_{n-1}$$
$$+ \frac{3}{8} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{251}{720} \Delta^3 y_{n-3} + \frac{95}{288} \Delta^4 y_{n-4} + \frac{19087}{60480} \Delta^5 y_{n-5} + \ldots,$$

$$u'_{n+1} = \Delta^{-2} y_{n+1} + \frac{1}{12} y_n + \frac{1}{12} \Delta y_{n-1}$$
$$+ \frac{19}{240} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{3}{40} \Delta^3 y_{n-3} + \frac{863}{12096} \Delta^4 y_{n-4} + \frac{275}{4032} \Delta^5 y_{n-5} + \ldots$$

On a ainsi des valeurs approchées de z'_{n+1} et u'_{n+1}, et il est dési-

rable que la nature de la fonction f et le choix de l'intervalle h soient tels que ces valeurs suffisent pour calculer y_{n+1} avec le degré d'exactitude requis. Pour s'en assurer, on pourra en partant de la valeur ainsi obtenue, qui permet d'avancer la table d'un rang, déterminer des valeurs plus exactes de z'_{n+1} et u'_{n+1} par les formules ordinaires

$$z'_{n+1} = \Delta^{-1} y_{n+2} - \frac{1}{2} y_{n+1} - \frac{1}{12} \Delta y_n \\ - \frac{1}{24} \Delta^2 y_{n-1} - \frac{19}{720} \Delta^3 y_{n-2} - \frac{3}{160} \Delta^4 y_{n-3} - \frac{863}{60480} \Delta^5 y_{n-4} + \ldots,$$

$$u'_{n+1} = \Delta^{-2} y_{n+2} + \frac{1}{12} y_{n+1} - \frac{1}{240} \Delta^2 y_{n-1} \\ - \frac{1}{240} \Delta^3 y_{n-2} - \frac{221}{60480} \Delta^4 y_{n-3} - \frac{19}{6048} \Delta^5 y_{n-4} + \ldots,$$

et constater qu'il n'en résulte pas de changement sensible pour y_{n+1}; dans le cas contraire, il faudrait recommencer avec la nouvelle valeur de y_{n+1}.

Les formules qui donnent les valeurs approchées de z'_{n+1} et u'_{n+1} sont peu convergentes, et il ne faut pas s'en étonner, puisqu'en réalité c'est une extrapolation, et non une véritable interpolation, que l'on fait ici. On en rend les coefficients plus maniables en calculant d'abord une valeur approchée de y_{n+1} par la formule simple suivante, sur laquelle porte toute l'incertitude :

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \Delta^4 y_{n-4} + \Delta^5 y_{n-5} + \ldots$$

et écrivant alors

$$z'_{n+1} = \frac{1}{3} y_{n+1} + Z_{n+1}, \qquad u'_{n+1} = \frac{1}{12} y_{n+1} + U_{n+1},$$

de façon à avoir avec une grande précision :

$$Z_{n+1} = \Delta^{-1} y_{n+1} + \frac{1}{6} y_n + \frac{1}{12} \Delta y_{n-1} \\ + \frac{1}{24} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{11}{720} \Delta^3 y_{n-3} - \frac{1}{288} \Delta^4 y_{n-4} - \frac{1073}{60480} \Delta^5 y_{n-5} - \ldots,$$

$$U_{n+1} = \Delta^{-2} y_{n+2} - \frac{1}{240} \Delta^2 y_{n-2} \\ - \frac{1}{120} \Delta^3 y_{n-3} - \frac{145}{12096} \Delta^4 y_{n-4} - \frac{61}{4032} \Delta^5 y_{n-5} - \ldots$$

Il arrive fréquemment que la fonction y puisse être mise sous la

forme

$$y = \alpha + \beta z' + \gamma u',$$

α, β, γ étant des fonctions analogues à f, mais susceptibles d'être calculées avec une exactitude certainement suffisante à l'aide des premières valeurs approchées de z' et u' que nous venons de déterminer, ou même simplement d'après la façon régulière dont se manifestent leurs variations.

On obtient alors une valeur exacte de y_{n+1} en résolvant les trois équations

$$z'_{n+1} = \frac{1}{3} y_{n+1} + Z_{n+1}, \qquad u'_{n+1} = \frac{1}{12} y_{n+1} + U_{n+1},$$
$$y_{n+1} = \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} z'_{n+1} + \gamma_{n+1} u'_{n+1},$$

qui donnent

$$y_{n+1} = \frac{\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} Z_{n+1} + \gamma_{n+1} U_{n+1}}{1 - \frac{\beta_{n+1}}{3} - \frac{\gamma_{n+1}}{12}}.$$

Il ne reste plus qu'à indiquer comment se fait la mise en train de la table d'intégration. Tout revient à déterminer les premières valeurs de y en nombre suffisant pour pouvoir commencer la table, c'est-à-dire pour permettre de calculer les différences de y jusqu'à l'ordre où leur influence devient insensible.

On y arrive de la façon suivante, par approximations successives.

Supposons d'abord données les quantités z_0 et u_0, par suite aussi y_0. En admettant que l'influence des différences cinquièmes de la fonction y soit négligeable, au moins au début de la table, on calculera y_{-2}, y_{-1}, y_1, y_2, qui avec y_0 suffisent pour la mise en train, en appliquant les formules suivantes,

$$z'_{\pm 1} = \left(z'_0 + \frac{1}{2}\mu\,\delta y_0 - \frac{1}{24}\mu\,\delta^3 y_0 \ldots\right) \pm \left(y_0 + \frac{1}{6}\delta^2 y_0 - \frac{1}{180}\delta^4 y_0 \ldots\right),$$
$$z'_{\pm 2} = \left(z'_0 + 2\mu\,\delta y_0 + \frac{1}{3}\mu\,\delta_3 y_0 \ldots\right) \pm \left(2y_0 + \frac{4}{3}\delta^2 y_0 + \frac{7}{45}\delta_4 y_0 \ldots\right);$$
$$u'_{\pm 1} = \left(u'_0 + \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{24}\delta^2 y_0 - \frac{1}{480}\delta^4 y_0 \ldots\right) \pm \left(z'_0 + \frac{1}{6}\mu\,\delta y_0 - \frac{7}{360}\mu\delta^3 y_0 \ldots\right),$$
$$u'_{\pm 2} = \left(u'_0 + 2y_0 + \frac{2}{3}\delta^2 y_0 + \frac{1}{30}\delta^4 y_0 \ldots\right) \pm \left(2z'_0 + \frac{4}{3}\mu\,\delta y_0 + \frac{2}{45}\mu\delta^3 y_0 \ldots\right),$$

qui résultent immédiatement des formules générales écrites plus haut.

Dans une première approximation, on fera simplement

$$z'_{\pm 1} = z'_0 \pm y_0, \qquad u'_{\pm 1} = u'_0 \pm z'_0 + \frac{1}{2} y_0,$$

et l'on en conclura y_{-1}, y_1; on aura ainsi des valeurs approchées de $\mu\delta y_0$ et $\delta^2 y_0$, que l'on introduira dans les formules, en négligeant les différences d'ordre supérieur, et il en résultera de nouvelles valeurs approchées pour y_{-1}, y_1 et aussi pour y_{-2}, y_2, par suite encore pour $\mu\delta y_0, \ldots, \delta^4 y_0$; on recommencera alors le calcul avec ces valeurs, autant de fois qu'il sera nécessaire, c'est-à-dire jusqu'au moment où les résultats ne changent plus.

S'il y avait lieu de tenir compte des différences d'ordre supérieur au quatrième, on ferait de même, en complétant les formules précédentes, et leur adjoignant les relations analogues relatives à $z'_{\pm 3}$, $u'_{\pm 3}$.

Dans certains cas, la forme de la fonction y peut suggérer comme ci-dessus des artifices propres à augmenter la convergence des approximations successives, mais le plus souvent au détriment de la simplicité des calculs.

Si l'on se donne $z_{-\frac{1}{2}}$ et $u_{-\frac{1}{2}}$, et par suite $y_{-\frac{1}{2}}$, on se servira de même des formules suivantes qui permettent de calculer y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, en supposant l'influence des différences quatrièmes négligeable, et qu'il serait au surplus facile de compléter ou modifier comme nous venons de le dire :

$$z'_{-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}} = \left(z'_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\delta y_{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{384}\delta^3 y_{-\frac{1}{2}}\cdots\right) \pm \left(\frac{1}{2} y_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{48}\mu\delta^2 y_{-\frac{1}{2}}\cdots\right),$$

$$z'_{-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}} = \left(z'_{-\frac{1}{2}} + \frac{9}{8}\delta y_{-\frac{1}{2}} + \frac{21}{128}\delta^3 y_{-\frac{1}{2}}\cdots\right) \pm \left(\frac{3}{2} y_{-\frac{1}{2}} + \frac{9}{16}\mu\delta^2 y_{-\frac{1}{2}}\cdots\right);$$

$$u'_{-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}} = \left(u'_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} y_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{384}\mu\delta^2 y_{-\frac{1}{2}}\cdots\right) \pm \left(\frac{1}{2} z'_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{48}\delta y_{-\frac{1}{2}} - \frac{7}{11\,520}\delta^3 y_{-\frac{1}{2}}\cdots\right)$$

$$u'_{-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}} = \left(u'_{-\frac{1}{2}} + \frac{9}{8} y_{-\frac{1}{2}} + \frac{27}{128}\mu\delta^2 y_{-\frac{1}{2}}\cdots\right) \pm \left(\frac{3}{2} z'_{-\frac{1}{2}} + \frac{9}{16}\delta y_{-\frac{1}{2}} + \frac{51}{1280}\delta^3 y_{-\frac{1}{2}}\cdots\right)$$

dans la première approximation, on prendra simplement

$$z'_{-1} = z'_{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} y_{-\frac{1}{2}}, \qquad u'_{-1} = u'_{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} z'_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} y_{-\frac{1}{2}},$$

$$z'_0 = z'_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} y_{-\frac{1}{2}}, \qquad u'_0 = u'_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} z'_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} y_{-\frac{1}{2}},$$

pour en tirer des valeurs approchées de y_{-1} et y_0, par suite de $\delta y_{-\frac{1}{2}}$; et l'on continuera tout comme ci-dessus, en introduisant d'abord cette valeur de $\delta y_{-\frac{1}{2}}$ dans les formules et négligeant les différences d'ordre supérieur.

Il peut être avantageux de remplacer dans les formules précédentes $y_{-\frac{1}{2}}$ par

$$\mu y_{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}\mu\delta^2 y_{-\frac{1}{2}} \cdots$$

Il est manifeste que tout ce que nous venons de dire s'applique aussi bien à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre telle que

$$\frac{dz}{dx} = f(x, z) = y;$$

il suffira de supprimer toutes les formules qui se rapportent aux quantités u'.

Les mêmes principes s'appliquent encore immédiatement à l'intégration d'un système d'équations simultanées.

63. Choisissons comme première application le problème suivant, dont la solution analytique simple nous permettra d'apprécier l'exactitude de la méthode empirique que nous venons de développer.

Soit à étudier le mouvement ascendant d'un point matériel pesant M, lancé à l'origine du temps, en un point O, suivant la verticale, et soumis à une résistance proportionnelle à sa masse et au carré de sa vitesse.

Appelons x le temps, u la hauteur du point M au-dessus de O, z sa vitesse de valeur initiale z_0 : désignons encore par g l'accélération de la pesanteur (supposée constante), et par k le coefficient de résistance (supposé aussi constant). L'équation du problème sera

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = -g - kz^2 = y,$$

de sorte qu'on est ramené aux notations précédentes; de plus, pour $x = 0$, on a $z = z_0$, $u = 0$. On a en réalité à intégrer une équation du premier ordre, et à faire ensuite une quadrature.

La solution analytique est bien connue ; en déterminant un angle φ par la relation

$$\operatorname{tang}\varphi = z_0\sqrt{\frac{k}{g}},$$

on a

$$z = \sqrt{\frac{g}{k}}\operatorname{tang}(\varphi - x\sqrt{gk}), \qquad u = \frac{1}{k \bmod}\log\frac{\cos(\varphi - x\sqrt{gk})}{\cos\varphi},$$

en représentant par mod le module des logarithmes décimaux, dont log est la caractéristique.

Ceci n'est valable d'ailleurs que pour le mouvement ascendant, qui se termine au temps $x' = \frac{\varphi}{\sqrt{gk}}$, et à la hauteur

$$u' = \frac{1}{k \bmod}\log \operatorname{séc}\varphi,$$

qui correspondent à la vitesse $z' = 0$.

En prenant comme unités le mètre et la seconde, nous ferons

$$g = 9{,}81, \qquad z_0 = 500, \qquad k = 10^{-4};$$

l'intervalle h de la variable x sera pris égal à l'unité, de sorte que nous supprimerons les accents des lettres z' et u' du numéro précédent ; de plus, on aura $x_0 = 0$, et par suite, généralement, $x_n = n$.

Les formules finies qui résolvent le problème sont alors

$$\varphi = 57^\circ 56' 10'',37, \qquad \omega = 1^\circ 47' 40'',403,$$

$$z = [2{,}4958345]\operatorname{tang}(\varphi - \omega x),$$

$$u = [4{,}3622157] \times \{0{,}2750175 + \log\cos(\varphi - \omega x)\},$$

et l'on a

$$x' = 32{,}2844, \qquad u' = 6332{,}51.$$

Construisons maintenant la table d'intégration, et d'abord calculons y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, en partant de

$$y_0 = -34{,}810, \qquad z_0 = 500;$$

la première approximation donne

$$z_{-1} = 534{,}810, \qquad z_1 = 465{,}190,$$

d'où

$$y_{-1} = -38{,}412, \qquad y_1 = -31{,}450, \qquad \mu\,\delta y_0 = 3{,}481, \qquad \delta^2 y_0 = -0{,}242.$$

Il en résulte, en seconde approximation,

$$
\begin{array}{lll}
z_{-2} = 576,905, & y_{-2} = -43,092, & \mu\,\delta y_0 = 3,497, \\
z_{-1} = 536,591, & y_{-1} = -38,603, & \delta^2 y_0 = -0,592, \\
z_1 = 466,890, & y_1 = -31,609, & \mu\,\delta^3 y_0 = 0,098, \\
z_2 = 437,019, & y_2 = -28,909, & \delta^4 y_0 = -0,013;
\end{array}
$$

puis, à nouveau,

$$
\begin{array}{lll}
z_{-2} = 577,438, & y_{-2} = -43,153, & \mu\,\delta y_0 = 3,503, \\
z_{-1} = 536,653, & y_{-1} = -38,610, & \delta^2 y_0 = -0,594, \\
z_1 = 466,836, & y_1 = -31,604, & \mu\,\delta^3 y_0 = 0,134, \\
z_2 = 436,615, & y_2 = -28,873, & \delta^4 y_0 = -0,030;
\end{array}
$$

et enfin

$$
\begin{array}{ll}
z_{-2} = 577,468, & y_{-2} = -43,157, \\
z_{-1} = 536,655, & y_{-1} = -38,610, \\
z_1 = 466,837, & y_1 = -31,604, \\
z_2 = 436,634, & y_2 = -28,875.
\end{array}
$$

On peut alors commencer la table d'intégration ci-après (p. 290 et 291); les sommes initiales sont

$$\delta^{-1} y_{-\frac{1}{2}} = 517,695, \qquad \delta^{-2} y_0 = 2,898;$$

pour avancer d'un rang, il suffit d'appliquer les formules

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \Delta^4 y_{n-4} + \ldots,$$

$$z_{n+1} = \Delta^{-1} y_{n+1} + \frac{1}{3} y_{n+1} + \frac{1}{6} y_n + \frac{1}{12} \Delta y_{n-1} + \frac{1}{24} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{11}{720} \Delta^3 y_{n-3} - \frac{1}{288} \Delta^4 y_{n-4} \ldots,$$

$$y_{n+1} = -9,81 - 10^{-4} \times z_{n+1}^2;$$

comme vérification, on a à chaque instant,

$$z_n = \Delta^{-1} y_{n+1} - \frac{1}{2} y_n - \frac{1}{12} \Delta y_{n-1} - \frac{1}{24} \Delta^2 y_{n-2} - \frac{19}{720} \Delta^3 y_{n-3} - \frac{3}{160} \Delta^4 y_{n-4} \cdots;$$

et pour suivre la variation de u, on a aussi

$$u_n = \Delta^{-2} y_{n+1} + \frac{1}{12} y_n - \frac{1}{240} \Delta^2 y_{n-2} - \frac{1}{240} \Delta^3 y_{n-3} - \frac{221}{60\,480} \Delta^4 y_{n-4} \cdots.$$

Tous ces calculs sont d'une extrême simplicité.

Pour se rendre compte de l'exactitude des résultats, il suffit de calculer directement quelques valeurs de z et u à l'aide des formules analytiques; c'est ainsi que l'on trouve

$$z_{10} = 262,727, \quad z_{20} = 126,832, \quad z_{30} = 22,448,$$
$$u_{10} = 3668,73, \quad u_{20} = 5573,29, \quad u_{30} = 6306,89,$$

tandis que la table donne

$$z_{10} = 262,726, \quad z_{20} = 126,832, \quad z_{30} = 22,447,$$
$$u_{10} = 3668,72, \quad u_{20} = 5573,28, \quad u_{30} = 6306,88.$$

Enfin, une interpolation immédiate de la table fournit les valeurs extrêmes

$$x' = 32,2843, \quad z' = 0, \quad u' = 6332,49.$$

Les erreurs sont donc insensibles.

x	u	[illegible]	$\Delta^{-2}y$	$\Delta^{-1}y$	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
—2.......					—43,157				
						4,547			
—1.......					—38,610		—747		
				517,695		3,800		153	
0.......	0,000	500,000	2,898		—34,810		—594		—36
				482,885		3,206		117	
1.......	483,151	466,837	485,783		—31,604		—477		—29
				451,281		2,729		88	
2.......	934,660	436,634	937,064		—28,875		—389		—18
				422,406		2,340		70	
3.......	1357,260	408,957	1359,470		—26,535		—319		—17
				395,871		2,021		53	
4.......	1753,299	383,457	1755,341		—24,514		—266		— 8
				371,357		1,755		45	
5.......	2124,802	359,841	2126,698		—22,759		—221		—13
				348,598		1,534		32	
6.......	2473,528	337,866	2475,296		—21,225		—189		— 2
				327,373		1,345		30	
7.......	2801,013	317,328	2802,669		—19,880		—159		— 7
				307,493		1,186		23	
8.......	3108,605	298,053	3110,162		—18,694		—136		— 5
				288,799		1,050		18	
9.......	3397,491	279,895	3398,961		—17,644		—118		— 3
				271,155		932		15	
10.......	3668,723	262,726	3670,116		—16,712		—103		
				254,443		829		14	
11.......	3923,235	246,437	3924,559		—15,883		— 89		
				238,560		740		11	
12.......	4161,857	230,930	4163,119		—15,143		— 78		
				223,417		662		9	
13.......	4385,329	216,125	4386,536		—14,481		— 69		
				208,936		593		7	
14.......	4594,315	201,945	4595,472		—13,888		— 62		
				195,048		531		8	

x	u	z	$\Delta^{-2}y$	$\Delta^{-1}y$	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
15.......	4789,407	188,328	4790,520		—13,357		— 54	
				181,691		477		5
16.......	4971,138	175,213	4972,211		—12,880		— 49	
				168,811		428		4
17.......	5139,984	162,551	5141,022		—12,452		— 45	
				156,359		383		6
18.......	5296,375	150,294	5297,381		—12,069		— 39	
				144,290		344		1
19.......	5440,694	138,400	5441,671		—11,725		— 38	
				132,565		306		6
20.......	5573,284	126,832	5574,236		—11,419		— 32	
				121,146		274		
21.......	5694,453	115,552	5695,382		—11,145		— 32	
				110,001		242		
22.......	5804,474	104,531	5805,383		—10,903		— 28	
				99,098		214		
23.......	5903,590	93,737	5904,481		—10,689		— 26	
				88,409		188		
24.......	5992,015	83,144	5992,890		—10,501		— 26	
				77,908		162		
25.......	6069,936	72,726	6070,798		—10,339		— 23	
				67,569		139		
26.......	6137,517	62,458	6138,367		—10,200		— 23	
				57,369		116		
27.......	6194,896	52,318	6195,736		—10,084		— 21	
				47,285		95		
28.......	6242,189	42,283	6243,021		— 9,989		— 21	
				37,296		74		
29.......	6279,491	32,333	6280,317		— 9,915		— 19	
				27,381		55		
30.......	6306,876	22,447	6307,698		— 9,860		— 21	
				17,521		34		
31.......	6324,400	12,606	6325,219		— 9,826		— 19	
				7,695		15		
32.......	6332,096	2,780	6332,914		— 9,811		— 19	
				— 2,116		— 4		
33.......	6329,980	—7,022	6330,798		— 9,815			
				—11,931				

La méthode d'intégration empirique peut souvent être employée avec grand avantage pour le calcul d'une éphéméride. En reprenant les notations du Chapitre V, et faisant en outre

$$\rho = \frac{p}{r} = 1 + \sin\varphi \cos v,$$

l'équation des aires du mouvement keplérien s'écrit

$$\frac{dv}{dt} = kp^{-\frac{3}{2}}\rho^2,$$

et par suite, quelle que soit la forme de l'orbite, on voit que pour connaître directement l'anomalie vraie et le rayon vecteur, en supprimant l'emploi de l'équation de Képler ou de tout autre intermédiaire moins simple encore, il suffit d'intégrer numériquement cette équation du premier ordre.

Dans le mouvement elliptique, si n est le moyen mouvement diurne, on a

$$p = \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{2}{3}} \cos^2\varphi.$$

Comme on exprime généralement v et n en secondes d'arc, et que ce calcul ne s'applique qu'aux petites planètes ou comètes, on fera

$$k = [3,5500066].$$

Si l'éphéméride doit procéder de j en j jours, on pourra supposer $h = 1$ dans les formules générales du n° **62**, à la condition de multiplier k par j dans le second membre de l'équation différentielle.

Pour supprimer le travail de la mise en train de la table d'intégration, on déterminera par un calcul direct les premières valeurs de v et de ρ, en nombre suffisant.

Supposons, par exemple,

$$n = 900'', \qquad \varphi = 20^\circ, \qquad j = 8,$$

et les époques successives étant désignées par t_n, faisons correspondre l'époque t_0 à une anomalie moyenne de 90°. En remplaçant x par t,

h par 1, z et z' par v dans les formules du n° **52**, on a l'équation

$$\frac{dv}{dt} = [3,9383750]\rho^2 = y,$$

avec

$$\rho = 1 + [\bar{1},5340517]\cos v = \frac{[0,3431477]}{r}.$$

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
v_{-2} &= 123^\circ.26'.46'',02, & \rho_{-2} &= [\bar{1},9092857], & y_{-2} &= 1^\circ.35'.14'',08,\\
v_{-1} &= 125.\ 1.\ 5,32, & \rho_{-1} &= [\bar{1},9051137], & y_{-1} &= 1.33.25,35,\\
v_0 &= 126.33.38,40, & \rho_0 &= [\bar{1},9010591], & y_0 &= 1.31.41,65,\\
v_1 &= 128.\ 4.30,21, & \rho_1 &= [\bar{1},8971202], & y_1 &= 1.30.\ 2,76,\\
v_2 &= 123.33.45,41, & \rho_2 &= [\bar{1},8932957], & y_2 &= 1.28.28,43.
\end{aligned}$$

La mise en train de la table d'intégration (page 294) en résulte immédiatement, et l'on poursuit comme dans l'application précédente, en usant des équations ci-dessus et des formules

$$v_n = \Delta^{-1}y_{n+1} - \frac{1}{2}y_n - \frac{1}{12}\Delta y_{n-1} - \frac{1}{24}\Delta^2 y_{n-2} - \frac{19}{720}\Delta^3 y_{n-3}\ldots,$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \ldots,$$

$$v_{n+1} = \Delta^{-1}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_{n+1} + \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{12}\Delta y_{n-1} + \frac{1}{24}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{11}{720}\Delta^3 y_{n-3} + \ldots.$$

Les valeurs $v_{15} = 146^\circ 57' 11'',07$, $\log\rho_{15} = \bar{1},8532786$, que l'on trouve pour l'époque t_{15} qui correspond à 120° d'anomalie moyenne, sont entièrement exactes, du moins au degré d'approximation que peut donner l'emploi des tables à sept décimales.

n	ρ	$\log \rho$	$\Delta^{-1}y$	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
—2..........				1°.35′.14″,08			
					—1′.48″,73		
—1..........				1.33.25,35		5″,03	
			125°.47′.39″,14		—1.43,70		—0″,22
0..........	126°.33′.38″,40	$\bar{1}$,9010591		1.31.41,65		4,81	
			127.19.20,79		—1.38,89		—0,25
1..........	128. 4.30,21	$\bar{1}$,8971202		1.30.20,76		4,56	
			128.49.23,55		—1.34,33		—0,19
2..........	129.33.45,44	$\bar{1}$,8932957		1.28.28,43		4,37	
			130.17.51,98		—1.29,96		—0,23
3..........	131. 1.28,53	$\bar{1}$,8895839		1.26.58,47		4,14	
			131.44.50,45		—1.25,82		—0,17
4..........	132.27.43,76	$\bar{1}$,8859835		1.25.32,65		3,97	
			133.10.23,10		—1.21,85		—0,19
5..........	133.52.35,16	$\bar{1}$,8824926		1.24.10,80		3,78	
			134.34.33,90		—1.18,07		—0,17
6..........	135.16. 6,62	$\bar{1}$,8791100		1.22.52,73		3,61	
			135.57.26,63		—1.14,46		—0,17
7..........	136.28.21,83	$\bar{1}$,8758338		1.21.38,27		3,44	
			137.19. 4,90		—1.11,02		—0,13
8..........	137.59.24,30	$\bar{1}$,8726626		1.20.27,25		3,31	
			138.39.32,15		—1. 7,71		—0,17
9..........	139.19.17,42	$\bar{1}$,8695949		1.19.19,54		3,14	
			139.58.51,69		—1. 4,57		—0,11
10..........	140.38. 4,43	$\bar{1}$,8666291		1.18.14,97		3,03	
			141.17. 6,66		—1. 1,54		—0,14
11..........	141.55.48,38	$\bar{1}$,8637638		1.17.13,43		2,89	
			142.34.20,09		— 58,65		—0,12
12..........	143.12.32,25	$\bar{1}$,8609975		1.16.14,78		2,77	
			143.50.34,87		— 55,88		—0,11
13..........	144.28.18,86	$\bar{1}$,8583287		1.15.18,90		2,66	
			145. 5.53,77		— 53,22		—0,11
14..........	145.43.10,94	$\bar{1}$,8557562		1.14.25,68		2,55	
			146.20.19,45		— 50,67		
15..........	146.57.11,07	$\bar{1}$,8532786		1.13.35,01			
			147.33.54,46				

CHAPITRE XI.

CALCUL NUMÉRIQUE DES PERTURBATIONS DU MOUVEMENT KÉPLÉRIEN.

---

64. Comme nous l'avons déjà vu, le mouvement d'une planète ou d'une comète M par rapport au Soleil ne peut être regardé comme káplérien que dans une première approximation, suffisante pendant quelque temps. Pour obtenir le mouvement réel, il faut tenir compte des forces perturbatrices et déterminer les changements que leur influence apporte au mouvement képlérien approché, c'est-à-dire les *perturbations* de ce mouvement. La détermination analytique de ces perturbations est un problème fort difficile, et lors même qu'il est abordable, comme dans le cas des astres principaux, la solution en est très compliquée : on est donc obligé, quand il s'agit d'une petite planète ou d'une comète, de recourir à la méthode empirique, qui permet de calculer sous forme purement numérique les perturbations de proche en proche, en intégrant les équations différentielles qui les définissent comme nous l'avons vu au Chapitre précédent. Le problème peut être posé de plusieurs façons différentes, présentant des avantages divers; nous allons exposer, avec les détails nécessaires, les principales solutions qu'il peut ainsi recevoir.

Voici tout d'abord comment nous pouvons classer ces diverses solutions. Supposons qu'avec certains éléments képlériens, constants ou variables, dont le symbole (e_1) désignera l'ensemble, on détermine en fonction du temps t la position d'un point M_1; soit de plus V_1 la vitesse de ce point, tandis que V est la vitesse réelle du point M.

1° On peut déterminer les éléments (e_1) de telle façon que la position M_1 coïncide avec la position réelle de M, en même temps que la vitesse V_1, considérée comme un vecteur, coïncide avec la vitesse réelle V.

Les éléments (e_1) seront alors, d'après la définition donnée au Chapitre V, dont nous garderons généralement toutes les notations, les éléments osculateurs à chaque instant à la trajectoire véritable de M; et puisque c'est par ses éléments osculateurs que l'on définit de la façon la plus accessible cette trajectoire, on voit que cette méthode, dite de la *variation des éléments*, est celle qui s'offre naturellement tout d'abord.

2° On peut faire en sorte que la position M_1 coïncide encore avec M, et en outre assujettir simplement le plan OM_1V_1 à coïncider avec le plan OMV. Dans ces conditions, les éléments ϑ_1 et i_1 définissent le plan de l'orbite instantanée du point M; et, entre les quatre éléments restants, on peut établir deux relations choisies arbitrairement.

3° On peut se contenter de faire coïncider simplement le point M_1 avec la projection M' du point M sur le plan de l'orbite de M_1. Dans ce cas, on pourra établir arbitrairement quatre relations entre les éléments (e_1); et il faudra en outre déterminer la longueur du vecteur $M'M$.

4° On peut assujettir uniquement les plans OMV et OM_1V_1 à coïncider; comme plus haut, les éléments ϑ_1 et i_1 définissent alors le plan de l'orbite instantanée du point M; les quatre autres éléments peuvent être choisis arbitrairement; mais il faut déterminer le vecteur M_1M, ce qui exige deux nouvelles inconnues, puisque l'on connaît déjà le plan OM_1M.

5° On peut enfin choisir arbitrairement les six éléments (e_1) et déterminer alors le vecteur M_1M, ce qui demande trois nouvelles inconnues.

65. Avant d'examiner plus attentivement ces diverses méthodes, nous allons encore passer en revue les diverses formes qu'il convient de donner dans ce but aux équations du mouvement du point M.

La force képlérienne qui agit sur M est dirigée suivant MO et égale à $\frac{k^2}{r^2}$, en faisant $k^2 = f(1+m)$, f désignant le coefficient d'attraction; dans le cas présent, comme il s'agit d'un astre de masse absolument négligeable devant celle du Soleil, on aura simplement $k^2 = f$.

Le point M est soumis de plus à une force perturbatrice F, dérivant d'une fonction de forces R, dite *fonction perturbatrice;* mais,

puisque nous n'avons en vue actuellement que le calcul purement numérique des perturbations, cette dernière circonstance est ici sans intérêt : nous n'avons pas à mettre en évidence les dérivées partielles de la fonction R par rapport aux diverses variables qui servent à l'exprimer, mais seulement les projections de la force F elle-même suivant certaines directions.

Si F_x, F_y, F_z sont les projections de F sur les axes fixes Ox, Oy, Oz, on a d'abord les équations naturelles les plus simples

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{k^2x}{r^3}+F_x,\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{k^2y}{r^3}+F_y,\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{k^2z}{r^3}+F_z. \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait $x=\rho\cos\lambda$, $y=\rho\sin\lambda$, de sorte que λ est la longitude de M, tandis que ρ est la projection OM′ du rayon vecteur OM sur le plan Oxy, les deux premières équations (1) peuvent être remplacées par les suivantes, où F_ρ, F_σ désignent les projections de la force F sur OM′ et sur la perpendiculaire à OM′ menée dans le plan Oxy :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{\eta^2}{\rho^3}-\frac{k^2\rho}{r^3}+F_\rho,\\ &\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\eta}{\rho^2}, \qquad \frac{d\eta}{dt}=\rho F_\sigma. \end{aligned}\right.$$

Cette transformation, bien connue en Mécanique élémentaire, résulte en particulier très simplement des principes de la théorie du mouvement relatif, que nous allons rappeler brièvement ici, en raison de leur usage ultérieur.

Soit $O\xi\eta\zeta$ un trièdre trirectangle mobile par rapport au trièdre fixe $Oxyz$ de même origine ; son mouvement est défini par les projections p, q, s de sa rotation instantanée sur les axes mobiles $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$.

Un point M en mouvement a pour coordonnées ξ, η, ζ, par rapport à ces mêmes axes ; sa vitesse absolue et son accélération absolue sont respectivement V et γ ; les projections de ces deux vecteurs sur

les axes mobiles sont respectivement

$$(3) \quad \begin{cases} V_\xi = \dfrac{d\xi}{dt} + q\zeta - s\eta, & \gamma_\xi = \dfrac{dV_\xi}{dt} + q V_\zeta - s V_\eta, \\ V_\eta = \dfrac{d\eta}{dt} + s\xi - p\zeta, & \gamma_\eta = \dfrac{dV_\eta}{dt} + s V_\xi - p V_\zeta, \\ V_\zeta = \dfrac{d\zeta}{dt} + p\eta - q\xi, & \gamma_\zeta = \dfrac{dV_\zeta}{dt} + p V_\eta - q V_\xi. \end{cases}$$

Pour appliquer ces principes dans le cas présent, il suffit de supposer que $O\xi$ coïncide avec OM', et $O\zeta$ avec Oz; dans ces conditions, on a

$$p = q = 0, \quad s = \frac{d\lambda}{dt}; \quad \xi = \rho, \quad \eta = 0, \quad \zeta = z;$$
$$\gamma_\xi = -\frac{k^2\rho}{r^3} + F_\rho, \quad \gamma_\eta = F_\sigma, \quad \gamma_\zeta = -\frac{k^2 z}{r^3} + F_z,$$

et l'on retrouve immédiatement les équations (2) jointes à la dernière des équations (1), toute confusion sur le double emploi momentané de la lettre η étant impossible.

Reportons-nous maintenant aux considérations développées au début du Chapitre III. Il en résulte, en faisant le changement de notations nécessaire, qu'en associant aux variables r, g, $\mathfrak{S}$ (rayon vecteur, argument de la latitude, longitude du nœud ascendant) les quantités r', h, h' (vitesse radiale, moment de la vitesse par rapport à l'origine, projection de ce moment sur l'axe Oz), on a, pour déterminer le mouvement du point M, un système d'équations canoniques dépendant de la fonction caractéristique

$$H = \frac{1}{2}\left(r'^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - \frac{k^2}{r} - R.$$

Si l'on introduit à la place de h' l'inclinaison i, on obtient donc, en éliminant r' et observant que la fonction R ne dépend que des variables r, g, $\mathfrak{S}$, i, le système d'équations suivant :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{k^2}{r^2} + \frac{\partial R}{\partial r},$$
$$\frac{dg}{dt} = \frac{h}{r^2} - \frac{\cot i}{h}\frac{\partial R}{\partial i}, \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{\partial R}{\partial g},$$
$$\frac{d\mathfrak{S}}{dt} = \frac{\operatorname{coséc} i}{h}\frac{\partial R}{\partial i}, \qquad \frac{di}{dt} = -\frac{\operatorname{coséc} i}{h}\frac{\partial R}{\partial \mathfrak{S}} + \frac{\cot i}{h}\frac{\partial R}{\partial g}.$$

Si l'on désigne par α l'une quelconque des quantités r, g, ϑ, i, la dérivée partielle $\frac{\partial R}{\partial \alpha}$ n'est autre chose que le quotient par $\delta\alpha$ du travail virtuel de la force perturbatrice F, quand on fait varier uniquement α, suivant les notations habituelles. Par suite, en désignant par F_r, F_p, F_n les projections de F sur le rayon vecteur OM, sur la perpendiculaire au rayon vecteur dans le plan de l'orbite instantanée et sur la normale à ce plan, on a immédiatement

$$\frac{\partial R}{\partial r} = F_r, \qquad \frac{\partial R}{\partial g} = r\,F_p,$$

$$\frac{\partial R}{\partial \vartheta} = \cos i\, r F_p - \sin i \cos g\, r F_n, \qquad \frac{\partial R}{\partial i} = \sin g\, r F_n,$$

de sorte que les équations précédentes deviennent

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{k^2}{r^2} + F_r,\\ &\frac{dg}{dt} = \frac{h}{r^2} - \cos i \frac{d\vartheta}{dt}, \qquad \frac{dh}{dt} = r F_p,\\ &\frac{d\vartheta}{dt} = \operatorname{coséc} i \sin g \frac{r F_n}{h}, \qquad \frac{di}{dt} = \cos g \frac{r F_n}{h}. \end{aligned}\right.$$

On obtient d'ailleurs directement ces équations par la théorie du mouvement relatif rappelée ci-dessus, de la façon la plus simple. Prenons pour axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, le rayon vecteur, la perpendiculaire à ce rayon vecteur dans le plan de l'orbite instantanée, et la normale à ce plan. On a, pour les composantes de la rotation instantanée du trièdre ainsi formé,

$$p = \sin i \sin g \frac{d\vartheta}{dt} + \cos g \frac{di}{dt},$$

$$q = \sin i \cos g \frac{d\vartheta}{dt} - \sin g \frac{di}{dt},$$

$$s = \frac{dg}{dt} + \cos i \frac{d\vartheta}{dt};$$

puis

$$\xi = r, \qquad \eta = \zeta = 0, \qquad V_\zeta = 0, \qquad \gamma_\xi = -\frac{k^2}{r^2} + F_r, \qquad \gamma_\eta = F_p, \qquad \gamma_\zeta = F_n;$$

l'application des formules (3) conduit alors immédiatement aux équations précédentes, si toutefois on pose encore $h = r^2 s$.

L'usage de ces équations peut être avantageusement modifié de la façon suivante, d'après Hansen. Soit un élément nouveau ϑ' défini

par la relation différentielle

$$d\vartheta' = \cos i \, d\vartheta,$$

et faisons $\vartheta = \vartheta' + \sigma$, en considérant σ comme un élément auxiliaire.

Appelons f la longitude dans l'orbite du point M, égale à $g + \vartheta$, et faisons aussi $f' = g + \vartheta'$, de sorte que $f = f' + \sigma$.

De même encore, si ω est la distance du périhélie au nœud, de sorte que la longitude du périhélie est $\varpi = \omega + \vartheta$, nous ferons $\varpi' = \omega + \vartheta'$, et l'on aura $\varpi = \varpi' + \sigma$.

Il convient de substituer ϑ' à ϑ, f' à f, ϖ' à ϖ, en y adjoignant l'élément auxiliaire σ; on obtient ainsi immédiatement le système d'équations plus simples :

$$(5) \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{k^2}{r^2} + F_r, \\ &\frac{df'}{dt} = \frac{h}{r^2}, \qquad \frac{dh}{dt} = rF_p, \\ &\frac{d\vartheta'}{dt} = \cot i \sin g \frac{rF_n}{h}, \qquad \frac{di}{dt} = \cos g \frac{rF_n}{h}, \qquad \frac{d\sigma}{dt} = \tang \frac{i}{2} \sin g \frac{rF_n}{h}; \end{aligned} \right.$$

les constantes arbitraires introduites par l'intégration des valeurs de $\frac{d\vartheta'}{dt}$ et de $\frac{d\sigma}{dt}$ n'en font en réalité qu'une seule.

Soient x' et y' les coordonnées du point M par rapport à deux axes rectangulaires Ox', Oy', tracés dans le plan de l'orbite instantanée, de façon que l'on ait

$$x' = r \cos f', \qquad y' = r \sin f';$$

et désignons par $F_{x'}$, $F_{y'}$ les projections de la force F sur ces axes.

En constatant l'équivalence des équations (2) et des deux premières équations (1), on voit que, de même, on peut remplacer les trois premières équations (5) par celles-ci :

$$(6) \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x'}{dt^2} &= -\frac{k^2 x'}{r^3} + F_{x'}, \\ \frac{d^2 y'}{dt^2} &= -\frac{k^2 y'}{r^3} + F_{y'}; \end{aligned} \right.$$

mais, à cause de la présence de h dans les dernières des équa-

tions (5), il faut y joindre la relation

$$h = x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt}.$$

La rotation du trièdre $Ox'y'z'$, en désignant ici par Oz' la normale au plan de l'orbite instantanée, est facile à trouver; il suffit de faire $g = -\vartheta'$ dans les expressions de p, q, s écrites en dernier lieu; elles deviennent alors

$$p = \cos f' r \frac{F_n}{h}, \qquad q = \sin f' r \frac{F_n}{h}, \qquad s = 0,$$

de sorte que la rotation cherchée est représentée par un vecteur égal à $\frac{rF_n}{h}$, dirigé suivant le rayon OM.

Le mouvement du trièdre $Ox'y'z'$ est donc tel que le plan $Ox'y'$ de l'orbite instantanée roule sans glisser sur le cône de sommet O qui contient la trajectoire du point M; et par suite, les droites Ox' décrivent un cône constamment orthogonal au plan $Ox'y'$.

66. Étudions maintenant en détail la première méthode, celle de la variation des éléments. Il s'agit de former les équations qui définissent les éléments osculateurs à chaque instant de l'orbite du point M, c'est-à-dire de faire dans les équations du mouvement le changement de variables qui consiste à substituer ces éléments aux coordonnées et aux projections de la vitesse du point M. C'est un problème que nous avons déjà résolu au Chapitre III, mais, comme nous l'avons fait observer plus haut, sous une forme qui ne convient pas ici.

Partons des équations (5) du numéro précédent; les trois dernières déterminent les éléments ϑ', i, σ qui fixent la position du plan de l'orbite instantanée. Puis, en rétablissant la variable r', qui représente la vitesse radiale, et faisant apparaître l'anomalie vraie v, les premières donnent

$$\frac{dr}{dt} = r', \qquad \frac{dr'}{dt} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{k^2}{r^2} + F_r,$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{d\varpi'}{dt} = \frac{h}{r^2}, \qquad \frac{dh}{dt} = r F_p.$$

Supposons alors les quantités r, v, r' exprimées en fonction de l'anomalie moyenne M, et de deux autres éléments, par exemple le

moyen mouvement n et l'excentricité e; quant à h, c'est simplement une fonction de n et e.

On fait le changement de variables désiré en écrivant les équations telles que

$$\frac{\partial r}{\partial M}\frac{dM}{dt}+\frac{\partial r}{\partial n}\frac{dn}{dt}+\frac{\partial r}{\partial e}\frac{de}{dt}=r', \qquad \dots$$

Or, d'après les conditions du problème, on a précisément

$$n\frac{\partial r}{\partial M}=r', \qquad n\frac{\partial r'}{\partial M}=\frac{h^2}{r^3}-\frac{k^2}{r^2}, \qquad n\frac{\partial v}{\partial M}=\frac{h}{r^2}.$$

Si donc nous appelons dF la différentielle totale d'une fonction quelconque F de M, n, e, mais en convenant d'y remplacer dM par $dM - n\,dt$, les équations cherchées prennent la forme

$$(a) \qquad \frac{dr}{dt}=0, \qquad \frac{dr'}{dt}=F_r, \qquad \frac{dv}{dt}+\frac{d\varpi'}{dt}=0, \qquad \frac{dh}{dt}=rF_p,$$

et il ne reste plus qu'à les résoudre par rapport aux dérivées

$$\frac{dM}{dt}-n, \quad \frac{dn}{dt}, \quad \frac{de}{dt}, \quad \frac{d\varpi'}{dt}.$$

Servons-nous aussi de l'angle φ tel que $\sin\varphi = e$, du paramètre p et du demi-grand axe a de l'orbite, liés à e et n par les relations

$$n^2 a^3 = k^2, \qquad p = a(1-e^2).$$

On a

$$h = k\sqrt{p},$$

et l'on peut écrire les égalités connues

$$r' = \frac{k}{\sqrt{p}}\,e\sin v, \qquad \frac{p}{r} = 1 + e\cos v$$

sous la forme

$$\frac{e}{h}\sin v = \frac{r'}{k^2},$$

$$\frac{e}{h}\cos v = \frac{h}{k^2 r} - \frac{1}{h}.$$

Différentions comme nous l'avons dit, en tenant compte des relations (a); on a

$$\sin v\,\frac{d}{dt}\left(\frac{e}{h}\right) - \cos v\,\frac{e}{h}\,\frac{d\varpi'}{dt} = \frac{F_r}{k^2},$$

$$\cos v\,\frac{d}{dt}\left(\frac{e}{h}\right) + \sin v\,\frac{e}{h}\,\frac{d\varpi'}{dt} = \left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{F_p}{k^2}.$$

Posons alors

$$U = \frac{r}{k\sqrt{p}} F_r, \qquad V = \frac{r}{k\sqrt{p}} F_p, \qquad W = \frac{r}{k\sqrt{p}} F_n,$$

puis

$$P = \sin\varphi \frac{p}{r} U + \cos\varphi \left(1 + \frac{p}{r}\right) V,$$

$$Q = -\cos\varphi \frac{p}{r} U + \sin\varphi \left(1 + \frac{p}{r}\right) V;$$

les équations précédentes donnent

$$h \frac{d}{dt}\left(\frac{e}{h}\right) = P, \qquad e \frac{d\varpi'}{dt} = Q;$$

par suite, d'après la valeur de $\frac{dh}{di}$,

$$\frac{de}{dt} = P + eV;$$

et en partant de la relation

$$\frac{1}{a} = \frac{k^2}{h^2} - k^2 \left(\frac{e}{h}\right)^2,$$

on a encore

$$\frac{da}{2a\,dt} = -\frac{dn}{3n\,dt} = \text{séc}^2\varphi(eP + V).$$

D'après le n° 23, on a maintenant

$$dr = \frac{r}{a} da - a\cos\varphi\, de + a \operatorname{tang}\varphi \sin\varphi (dM - n\,dt),$$

et puisque $dr = 0$, d'après les équations (a), il vient, en profitant des résultats précédents,

$$\operatorname{tang}\varphi \sin\varphi \left(\frac{dM}{dt} - n\right) = \cos\varphi(P + eV) - 2\frac{r}{p}(eP + V).$$

Dans le second membre de cette relation, le coefficient de V est égal à

$$\left(1 + \frac{p}{r}\right)\left(1 - \frac{2r}{p}\right),$$

comme on le voit en remplaçant $e\cos\varphi$ par $\frac{p}{r} - 1$. Mettant alors

pour $\sin\varphi P$ et $\sin\varphi\left(1+\frac{p}{r}\right)V$ les valeurs respectivement égales

$$\cos\varphi Q + \frac{p}{r} U \quad \text{et} \quad Q + \cos\varphi \frac{p}{r} U,$$

on trouve sans peine

$$\frac{dM}{dt} = n - \cot\varphi Q - 2\cos\varphi U.$$

Rassemblant les résultats, les équations définitives qui déterminent les éléments osculateurs s'écrivent :

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \cos g W, \qquad \dfrac{d\mathfrak{S}'}{dt} = \cot i \sin g W, \qquad \dfrac{d\sigma}{dt} = \tang\dfrac{i}{2}\sin g W, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \operatorname{séc}\varphi P + \tang\varphi V, \\ \dfrac{dn}{dt} = -3n\operatorname{séc}\varphi(\tang\varphi P + \operatorname{séc}\varphi V), \\ \dfrac{d\varpi'}{dt} = \operatorname{coséc}\varphi Q, \qquad \dfrac{dM}{dt} = n - \cot\varphi Q - 2\cos\varphi U. \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' + \sigma, \qquad \varpi = \varpi' + \sigma, \qquad g = v + \varpi' - \mathfrak{S}',$$

et il est bien facile, par suite, d'éliminer σ pour calculer directement $\mathfrak{S}$ et ϖ.

Quand l'inclinaison i est très petite, le calcul direct de i et $\mathfrak{S}'$ peut présenter des difficultés évidentes, pour des raisons *a priori* déjà expliquées. On fera alors

$$c = \sin i \sin\mathfrak{S}', \qquad c' = \sin i \cos\mathfrak{S}',$$

et ces deux inconnues, équivalentes à i et $\mathfrak{S}'$, seront déterminées par les équations

$$(7^a)\qquad \frac{dc}{dt} = \cos i \sin f' W, \qquad \frac{dc'}{dt} = \cos i \cos f' W,$$

f' étant la longitude dans l'orbite $v + \varpi'$, comptée à partir de l'axe Ox' défini au numéro précédent.

De même, quand l'excentricité est très petite, on fera

$$b = \sin\varphi \sin\varpi', \qquad b' = \sin\varphi \cos\varpi',$$

et l'on aura

$$(7^b) \qquad \frac{db}{dt} = P' + bV, \qquad \frac{db'}{dt} = Q' + b'V,$$

en posant

$$P' = \sin\varpi' P + \cos\varpi' Q = -\cos f' \frac{p}{r} U + \sin f' \left(1 + \frac{p}{r}\right) V,$$

$$Q' = \cos\varpi' P - \sin\varpi' Q = \quad \sin f' \frac{p}{r} U + \cos f' \left(1 + \frac{p}{r}\right) V.$$

De plus, il faut substituer à l'emploi de l'anomalie moyenne celui de la longitude moyenne l', égale à $M + \varpi'$, et comptée comme f' : c'est-à-dire que l désignant la longitude moyenne ordinaire $M + \varpi$, on a $l = l' + \sigma$. Il vient alors

$$(7^c) \qquad \frac{dl'}{dt} = n + \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} Q - 2\cos\varphi U,$$

et l'on peut, d'ailleurs, faire cette même transformation sans inconvénient dans tous les cas.

Les équations (7) conviennent au cas d'une planète. S'il s'agit d'une comète à courte période, il vaut mieux se servir, en plus de i, ϑ', σ, ϖ', du paramètre p ou de la distance périhélie q, de l'excentricité e ou de l'inverse du demi-grand axe a, enfin de l'époque T d'un passage au périhélie. En observant les relations

$$p = q(1 + e), \qquad M = n(t - T), \qquad np^{\frac{3}{2}} = k\cos^3\varphi,$$

on aura donc l'ensemble d'équations

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{di}{dt} = \cos g W, \qquad \dfrac{d\vartheta'}{dt} = \cot i \sin g W, \qquad \dfrac{d\sigma}{dt} = \operatorname{tang}\dfrac{i}{2}\sin g W, \\ \dfrac{dp}{dt} = 2pV \quad \text{ou} \quad \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{q}{1+e}[(2+e)V - P], \\ \dfrac{de}{dt} = P + eV \quad \text{ou} \quad \dfrac{d\left(\frac{1}{a}\right)}{dt} = -\dfrac{2}{p}(eP + V), \\ \dfrac{d\varpi'}{dt} = \dfrac{Q}{e}, \\ (1 - e^2)\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{p^{\frac{3}{2}}}{k}\left(\dfrac{Q}{e} + 2U\right) - 3(t - T)(eP + V); \end{array} \right.$$

et s'il est nécessaire, on pourra remplacer i et ϑ' par c et c'.

Pour une comète dont l'orbite est voisine de la forme parabolique, la dernière des formules précédentes, relative à T, devient illusoire, et il est nécessaire de la transformer de façon à faire disparaître la difficulté qui provient du diviseur $1 - e^2$ dans le second membre.

En égalant à zéro, comme l'indique la première des relations (a), la valeur de dr fournie par la formule (15) du n° **23**, on a

$$\frac{k}{\sqrt{p}} e \sin v \, dT = \cos v \, dq - \frac{p^2}{2(1+e)^2} \sin^2 v \frac{r}{p} J \, d\left(\frac{1}{a}\right),$$

en faisant pour abréger

$$J = 1 + \frac{\tang^2 \frac{v}{2}}{1+e} + \frac{2se}{(1+e)^2} \tang^4 \frac{v}{2};$$

il en résulte immédiatement

$$(8^a) \qquad \frac{ke(1+e)^2}{p^{\frac{3}{2}}} \frac{dT}{dt} = Q - 2 \tang \frac{v}{2} V + \sin v \frac{r}{p} J(eP + V),$$

comme le montre une transformation facile de l'expression de $\frac{dq}{dt}$.

On a vu précédemment comment on peut calculer le coefficient s qui se réduit à $\frac{1}{5}$ dans le cas de la parabole.

Les formules (8) et (8^a) conviennent aussi bien au cas d'une orbite hyperbolique. Si l'excentricité était suffisamment grande, on pourrait aussi se servir des équations (7) modifiées comme il suit : a étant ici négatif, on ferait

$$n' = k(-a)^{-\frac{3}{2}}, \qquad M' = n'(t - T),$$

de sorte que M′ serait précisément la quantité $4\varepsilon^3 P$ du n° **21** qui figure dans l'équation qui remplace celle de Képler, et l'on aurait, en n'écrivant que les équations modifiées,

$$\frac{de}{dt} = P + eV, \qquad \frac{dn'}{dt} = \frac{3n'}{e^2 - 1}(eP + V),$$

$$\frac{dM'}{dt} = n' + \left(\frac{Q}{e} + 2U\right)\sqrt{e^2 - 1}.$$

67. On peut élargir, d'une façon bien naturelle, la portée de la

méthode de la variation des éléments en observant que les expressions képlériennes des coordonnées et des composantes de la vitesse du point M dépendent encore de la constante k. Or, rien n'empêche de regarder cette constante comme un paramètre que l'on peut faire varier lui-même en le prenant comme un septième élément de l'orbite : on est libre alors d'établir une relation arbitrairement choisie entre certains de ces sept éléments.

Il est d'abord clair que les éléments i et ϑ, ou plutôt i, ϑ', σ, sont hors de cause : ce sont toujours les mêmes. Supposons donc r, r', h exprimés en fonction d'éléments képlériens M_1, p_1, e_1, analogues à M, p, e, et d'une constante k_1 remplaçant k; soit aussi v_1 l'anomalie vraie résultant de ces éléments, et ϖ'_1 la longitude du périhélie correspondante, définie comme ϖ'.

Servons-nous aussi du moyen mouvement n_1 et du demi-grand axe a_1 associés au paramètre p_1, à l'excentricité e_1 ou $\sin\varphi_1$, et à k_1 par les formules ordinaires

$$p_1 = a_1 \cos^2\varphi_1, \qquad n_1^2 a_1^3 = k_1^2.$$

On a ici

$$h = k_1\sqrt{p_1},$$

et au lieu de k_1, nous introduirons une inconnue équivalente p telle que l'on ait

$$h = k\sqrt{p};$$

k ayant le même sens qu'au numéro précédent, p sera précisément le paramètre de l'orbite osculatrice proprement dite, et l'on aura

$$k_1 = k\sqrt{\frac{p}{p_1}}.$$

Les équations qui serviront à définir les nouvelles variables seront les mêmes que précédemment, mais à la condition évidente d'augmenter la composante F_r de la force perturbatrice F suivant le rayon vecteur de $\frac{k_1^2 - k^2}{r^2}$; remplaçant encore h par p, on a donc

$$\frac{dr}{dt} = 0, \qquad \frac{dr'}{dt} = F_r + \frac{k^2(p - p_1)}{r^2 p_1}, \qquad \frac{dv_1}{dt} + \frac{d\varpi'_1}{dt} = 0,$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2r\sqrt{p}\,F_\rho}{k} = 2p\,V,$$

la différentiation indiquée par la caractéristique d étant toujours entendue de la même façon.

Écrivons alors

$$e_1 \sin v_1 = \frac{r'\sqrt{p_1}}{k_1} = \frac{r' p_1}{k\sqrt{p}},$$

$$e_1 \cos v_1 = \frac{p_1}{r} - 1,$$

et différentions en tenant compte des équations précédentes; si l'on fait

$$S = \frac{k(p-p_1)}{r^2\sqrt{p}} + \frac{p_1}{r}U - e_1 \sin v_1 V$$

(U, V, W ayant toujours la même signification), il vient

$$\frac{de_1}{dt} = \quad \sin v_1 S + \frac{dp_1}{dt}\,\frac{e_1+\cos v_1}{p_1},$$

$$e_1\frac{d\varpi'_1}{dt} = -\cos v_1 S + \frac{dp_1}{dt}\,\frac{\sin v_1}{p_1}.$$

Enfin, comme plus haut, on a

$$\operatorname{tang}\varphi_1 \sin v_1 \left(\frac{dM_1}{dt} - n_1\right) = \cos v_1 \frac{de_1}{dt} - \frac{r}{a_1^2}\,\frac{da_1}{dt};$$

et pour achever, il reste à se servir de la relation que l'on peut établir arbitrairement entre p, p_1, e_1, M_1, ϖ'_1. Dans la solution classique, on fait $p_1 = p$; parmi les autres hypothèses que l'on peut imaginer en nombre infini, contentons-nous de développer celle qui consiste à supposer le paramètre p_1 constant : c'est celle qui conduit aux résultats les plus simples, et à l'abri de toute difficulté de calcul.

Dans ces conditions, on a

$$\frac{da_1}{a_1^2} = \frac{2e_1\,de_1}{p_1},$$

et, par suite,

$$\frac{dM_1}{dt} - n_1 = \left(\cot\varphi_1 \cos v_1 - 2\cos\varphi_1 \frac{r}{p_1}\right) S.$$

Rassemblant les résultats, on a finalement

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= 2pV, \\ \frac{d\varphi_1}{dt} &= \text{séc}\,\varphi_1 \sin v_1 S, \\ \frac{d\varpi'_1}{dt} &= -\,\text{coséc}\,\varphi_1 \cos v_1 S, \\ \frac{dM_1}{dt} &= n_1 + \left(\cot\varphi_1 \cos v_1 - 2\cos\varphi_1 \frac{r}{p_1}\right) S. \end{aligned}\right.$$

On a de plus

$$a_1 = p_1\,\text{séc}^2\varphi_1, \qquad n_1 = \frac{k\sqrt{p}}{p_1^2}\cos^3\varphi_1,$$

et pour l'usage, il convient de joindre aux équations précédentes la relation

$$(9^a)\qquad \frac{dn_1}{dt} = n_1 V - 3 n_1 \,\text{tang}\,\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt}.$$

Si l'excentricité est très petite, on remplace φ_1, ϖ'_1, M_1 par

$$b_1 = \sin\varphi_1 \sin\varpi'_1, \qquad b'_1 = \sin\varphi_1 \cos\varpi'_1, \qquad l'_1 = M_1 + \varpi'_1,$$

et l'on a

$$(9^b)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{db_1}{dt} = -\cos f' S, \qquad \frac{db'_1}{dt} = \sin f' S, \\ &\frac{dl'_1}{dt} = n_1 - \left(\text{tang}\,\frac{\varphi_1}{2}\cos v_1 + 2\cos\varphi_1 \frac{r}{p_1}\right) S, \end{aligned}\right.$$

f' étant toujours la longitude dans l'orbite, comptée comme précédemment.

Dans le cas d'une orbite cométaire, on écrira plutôt :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dp}{dt} = 2pV, \qquad \frac{de_1}{dt} = \sin v_1 S, \qquad e_1 \frac{d\varpi'_1}{dt} = -\cos v_1 S, \\ &\frac{dT_1}{dt} = (t - T_1)\left(V - \frac{3 e_1 \sin v_1}{1 - e_1^2} S\right) + \frac{p_1^2}{k\sqrt{p}(1 - e_1^2)}\left(2\frac{r}{p_1} - \frac{\cos v_1}{e_1}\right) S, \end{aligned}\right.$$

en appelant T_1 l'époque du passage au périhélie dans l'orbite définie par les éléments marqués de l'indice 1.

Si l'excentricité se rapproche beaucoup de l'unité, on remplacera

la dernière de ces formules, qui devient alors illusoire, par

$$(10^a) \quad \frac{dT_1}{dt} = (t - T_1)V + \frac{p_1^2}{k\sqrt{p}(1+e_1)^2}\left(-\frac{\cos v_1}{e_1} + \sin^2 v_1 \frac{r}{p_1} J_1\right) S;$$

pour établir cette équation, où J_1 a la même signification que J au numéro précédent, il faut, en égalant à zéro la valeur de dr fournie par la formule (15) du n° 23, non seulement affecter les lettres de l'indice 1, mais, afin de tenir compte de la variabilité de k_1 dans la façon même dont cette formule a été établie, augmenter dT_1 de $-\frac{dk_1}{k_1}(t - T_1)$, ainsi qu'on le voit en calculant l'expression de dM_1.

Il reste à indiquer comment on peut passer des éléments (e_1) de la nouvelle orbite osculatrice aux éléments osculateurs proprement dits (e), auxquels il faut toujours revenir. On connaît déjà i, ϑ', σ et le paramètre p. L'anomalie vraie v_1 est calculée en fonction de l'anomalie moyenne M_1, ou bien, s'il s'agit d'une comète, en fonction de la quantité P_1 que nous avons définie au Chapitre V pour remplacer M_1, et qui est égale ici à

$$\frac{k\sqrt{p}}{p_1^2}\sqrt{\frac{(1+e_1)^3}{2}}(t - T_1).$$

Égalant alors les expressions de r et de r' dans les deux orbites, on a les deux équations

$$\frac{e \sin v}{p} = \frac{e_1 \sin v_1}{p_1},$$

$$\frac{1 + e\cos v}{p} = \frac{1 + e_1 \cos v_1}{p_1},$$

propres à déterminer v et e.

On obtient ϖ' par la relation

$$v + \varpi' = v_1 + \varpi'_1,$$

et de v, on conclut enfin l'anomalie moyenne M, ou bien l'époque T par l'intermédiaire de la quantité P égale à

$$k\sqrt{\frac{(1+e)^3}{2p^3}}(t - T).$$

On peut chercher à déterminer les perturbations des éléments (e)

directement à l'aide de celles des éléments (e_1), afin d'obtenir pour les premières une précision équivalente à celle des secondes; mais souvent, ici comme dans les cas analogues que nous rencontrerons plus loin, les formules deviennent d'une extrême complication, et il paraît alors préférable, pour arriver au même résultat, de calculer les éléments eux-mêmes, comme nous venons de l'indiquer, à la condition d'employer le nombre de chiffres nécessaire pour atteindre la même précision : ce petit surcroît de peine, même si l'on doit faire usage de tables à huit décimales, est largement compensé par la simplicité et la rapidité des calculs.

Supposons par exemple, dans le cas qui nous occupe, que l'on recherche la précision du centième de seconde : on calculera d'abord v_1 très exactement à l'aide de tables à huit décimales; puis, pour obtenir v et e, on pourra chercher les différences $v - v_1$ et $e - e_1$, dont la détermination directe est facile. Faisons en effet $\Delta p = p - p_1$, et écrivons les équations en v et e sous la forme

$$e \sin v = \frac{p}{p_1} e_1 \sin v_1,$$

$$e \cos v = \frac{p}{p_1} e_1 \cos v_1 + \frac{\Delta p}{p_1};$$

des combinaisons évidentes donnent successivement

$$e \sin(v - v_1) = -\frac{\Delta p}{p_1} \sin v_1,$$

$$e \cos(v - v_1) = \frac{p}{p_1} e_1 + \frac{\Delta p}{p_1} \cos v_1,$$

$$e \cos \frac{v - v_1}{2} = \frac{p}{p_1} e_1 \cos \frac{v - v_1}{2} + \frac{\Delta p}{p_1} \cos \frac{v + v_1}{2},$$

de sorte que l'on a

$$\operatorname{tang}(v - v_1) = \frac{-\Delta p \sin v_1}{p e_1 + \Delta p \cos v_1},$$

$$e - e_1 = \frac{\Delta p}{p_1} \left(e_1 + \cos \frac{v + v_1}{2} \operatorname{séc} \frac{v - v_1}{2} \right),$$

et il suffit d'employer pour ce calcul des tables à cinq décimales, ou six au plus.

Si l'on veut avoir exactement la différence $\varphi - \varphi_1$, on écrira

$$\sin(\varphi - \varphi_1) = (e - e_1) \cos \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \operatorname{séc} \frac{\varphi + \varphi_1}{2}.$$

La différence $v - v_1$ donne la valeur exacte de ϖ', et l'on achève, par l'usage de tables à huit décimales, en déterminant M ou T, et en calculant, si l'on veut, a et n par les formules

$$a = p \,\text{séc}^2 \varphi, \qquad n = k a^{-\frac{3}{2}}.$$

68. Pour utiliser les divers systèmes d'équations que nous venons d'établir dans les deux précédents paragraphes, il faut d'abord savoir calculer les composantes F_r, F_p, F_n de la force perturbatrice, ou plutôt les fonctions U, V, W équivalentes. D'après le Chapitre I, si M_j désigne une grosse planète, ou plus exactement le centre de gravité d'un système planétaire, de masse m_j, et de coordonnées x_j, y_j, z_j par rapport aux axes Ox, Oy, Oz, la fonction perturbatrice R est égale à

$$\sum_j f m_j \left(\frac{1}{\Delta_j} - \frac{x x_j + y y_j + z z_j}{r_j^3} \right),$$

en désignant par Δ_j la distance MM_j, et par r_j le rayon vecteur OM_j. Dans ce qui suit, nous supprimerons le signe de sommation $\sum$, mais il reste entendu qu'on devra toujours le rétablir pratiquement. En remplaçant f par k^2, puisque la masse de M est nulle, les projections de la force perturbatrice sont donc

$$F_x = k^2 m_j \left(\frac{x_j - x}{\Delta_j^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right), \qquad \ldots,$$

et ces expressions subsistent, quels que soient les axes fixes ou mobiles $Oxyz$, mais d'origine O, d'après leur nature même.

Si donc ξ_j, η_j, ζ_j sont les coordonnées de M_j par rapport à des axes ayant pour origine le point M, et dirigés respectivement suivant le rayon vecteur OM, la perpendiculaire à ce rayon vecteur dans le plan de l'orbite instantanée de M, et la normale à ce plan, on a immédiatement

$$U = \frac{k m_j r}{\sqrt{p}} \left(Q_j \xi_j - \frac{r}{r_j^3} \right),$$

$$V = \frac{k m_j r}{\sqrt{p}} Q_j \eta_j, \qquad W = \frac{k m_j r}{\sqrt{p}} Q_j \zeta_j,$$

en faisant

$$Q_j = \frac{1}{\Delta_j^3} - \frac{1}{r_j^3}, \qquad \Delta_j^2 = \xi_j^2 + \eta_j^2 + \zeta_j^2.$$

Les éphémérides donnent les valeurs de r_j, ainsi que de la longitude et de la latitude héliocentriques λ_j, β_j de M_j ; il en résulte immédiatement pour déterminer les coordonnées ξ_j, η_j, ζ_j, l'ensemble de formules

$$\mu_j = r_j \cos\beta_j \cos(\lambda_j - \Omega),$$
$$\nu_j = r_j[\sin i \sin\beta_j + \cos i \cos\beta_j \sin(\lambda_j - \Omega)];$$

$$\xi_j = \mu_j \cos g + \nu_j \sin g - r,$$
$$\eta_j = -\mu_j \sin g + \nu_j \cos g,$$
$$\zeta_j = r_j[\cos i \sin\beta_j - \sin i \cos\beta_j \sin(\lambda_j - \Omega)],$$

g désignant toujours l'argument de la latitude de M; les quantités intermédiaires μ_j, ν_j sont les projections du vecteur OM_j sur la direction ON du nœud ascendant de l'orbite de M, et sur la direction perpendiculaire à ON située dans le plan de l'orbite.

Les coordonnées λ_j, β_j sont des coordonnées écliptiques, rapportées généralement à l'équinoxe moyen du commencement de l'année décadaire la plus voisine; bien entendu, les axes de référence auxquels se rapportent les éléments Ω, i, ω de l'orbite doivent être les mêmes.

69. L'usage des équations (7), par exemple, comme de tous les autres systèmes semblables, est extrêmement simple. Si les perturbations doivent être calculées de j en j jours, il sera tout d'abord commode de prendre comme unité de temps l'intervalle de j jours; pour cela, il suffit de multiplier la constante k par j, *partout* où elle figure, et de supposer que n désigne le moyen mouvement pour j jours, c'est-à-dire est le moyen mouvement diurne multiplié par j; de même dans les formules relatives aux orbites cométaires, les temps t et T sont alors exprimés à l'aide d'une unité égale à j jours, c'est-à-dire que leurs mesures en jours doivent être divisées par j. Rien n'empêche d'ailleurs de supposer j négatif, et c'est ce qu'il conviendra de faire si l'on veut calculer les perturbations en remontant dans le temps passé à partir de l'époque initiale.

De cette manière, l'intervalle h qui figure dans les formules de quadrature à appliquer d'après le Chapitre précédent sera toujours égal à l'unité.

Le plus souvent, on prend $j = \pm 40$; mais il est clair que ce choix doit être modifié suivant les circonstances.

Il est à peine utile d'ajouter que les deux membres de chacune des équations employées doivent être exprimés avec la même unité; si par exemple, on ne fait usage que des équations (7), et que l'on suppose comme d'habitude tous les éléments correspondants exprimés en secondes d'arc, on pourra exprimer U, V, W directement en secondes, en y remplaçant k par k'', et il ne restera plus qu'à prendre soin de mettre pour n sa valeur en radians dans le second membre de l'équation qui donne $\frac{dn}{dt}$. Rappelons ici que l'on a, en appelant R'' la valeur du radian en secondes,

$$k = [\bar{2}{,}23558144], \qquad R'' = [5{,}31442513], \qquad k'' = [3{,}55000657].$$

En considérant toujours les équations (7), appelons i_0, ϑ_0, φ_0, n_0, ϖ_0, les valeurs des éléments osculateurs correspondants, à l'époque t_0 qui sert d'origine au calcul, et faisons $\sigma_0 = 0$. Désignons aussi par M_{00} ou l_{00} les valeurs de l'anomalie moyenne ou de la longitude moyenne pour la même époque, tandis que nous ferons

$$M_0 = n_0(t - t_0) + M_{00}, \qquad l_0 = n_0(t - t_0) + l_{00},$$

représentant donc ainsi l'anomalie ou la longitude moyenne de l'époque t, mais calculée dans l'orbite osculatrice de l'époque t_0.

Si l'on pose maintenant

$$i = i_0 + \delta i, \qquad \vartheta' = \vartheta_0 + \delta\vartheta', \qquad \varphi = \varphi_0 + \delta\varphi, \qquad n = n_0 + \delta n,$$
$$\varpi' = \varpi_0 + \delta\varpi', \qquad M = M_0 + \delta M \qquad (\text{ou } l' = l_0 + \delta l'),$$

les perturbations δi, $\delta\vartheta'$, σ, $\delta\varphi$, δn, $\delta\varpi'$, δM, s'annulant toutes à l'époque t_0, on aura pour les déterminer le système d'équations différentielles

$$\frac{d\delta i}{dt} = \cos g\, W,$$
$$\frac{d\delta\vartheta'}{dt} = \cot i \sin g\, W,$$
$$\frac{d\sigma}{dt} = \tang\frac{i}{2} \sin g\, W,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\frac{d\delta M}{dt} = \delta n - \cot\varphi\, Q - 2\cos\varphi\, U;$$

et l'on intégrera ces équations comme nous l'avons vu au n° 62, la petitesse des perturbations rendant en général le calcul très facile. En

se reportant aux formules et notations de ce paragraphe, on obtiendra les valeurs des seconds membres (sauf le premier terme δn du second membre de la dernière équation) en employant les valeurs approchées fournies par l'application de la formule

$$z_{n+1} = \Delta^{-1} y_{n+1} + \frac{1}{3}(y_n + \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \Delta^4 y_{n-4} + \ldots)$$
$$+ \frac{1}{6} y_n + \frac{1}{12} \Delta y_{n-1} + \frac{1}{24} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{11}{720} \Delta_3 y_{n-3} - \frac{1}{288} \Delta^4 y_{n-4} \ldots;$$

et l'on peut même, si l'on consent à négliger les perturbations du second ordre par rapport aux masses m_j, l'intervalle de temps $t - t_0$ étant assez court, calculer les seconds membres en y supposant simplement les éléments constants.

Mais quand il s'agit du premier terme δn de l'expression de $\frac{d\delta M}{dt}$, on devra le remplacer par sa valeur exacte que l'on obtient, après avoir calculé $\frac{d\delta n}{dt}$ comme nous venons de le dire, par la formule

$$z_n = \Delta^{-1} y_{n+1} - \frac{1}{2} y_n - \frac{1}{12} \Delta y_{n-1} - \frac{1}{24} \Delta^2 y_{n-2} - \frac{19}{720} \Delta^3 y_{n-3} - \frac{3}{160} \Delta^4 y_{n-4} \ldots$$

Quand on utilise les équations (9) du n° 67, on prendra p_0, φ_0, ϖ_0 pour valeurs initiales de p, φ_1, ϖ'_1, et l'on choisira la constante p_1 égale à p_0. En faisant encore $M_1 = M_0 + \delta M_1$, ... et $p = p_0 + \delta p$, on aura des équations semblables aux précédentes, mais la fonction S égale à

$$\frac{k\,\delta p}{r^2\sqrt{p}} + \frac{p_1}{r} U - e_1 \sin \varphi_1 V$$

demandera, pour être calculée exactement, la connaissance exacte de δp : on y parviendra comme ci-dessus quand il s'agissait de δn, puisque l'on détermine directement δp par l'équation

$$\frac{d\delta p}{dt} = 2pV;$$

et si le coefficient de δp dans S était assez petit, on pourrait même souvent se contenter de la valeur approchée de δp qui suffit pour calculer les autres termes des seconds membres des équations.

Dans le cas des équations de la forme

$$\frac{d\delta M}{dt} = \delta n + \mu,$$

on peut encore procéder autrement, de façon à éviter le calcul exact de δn. Il suffit d'écrire δM sous la forme $\delta_1 M + \delta_2 M$, les quantités $\delta_1 M$ et $\delta_2 M$ qui s'annulent pour l'époque t_0, étant définies par les deux équations

$$\frac{d\delta_1 M}{dt} = \delta n, \qquad \frac{d\delta_2 M}{dt} = \mu;$$

on voit alors, en effet, que $\delta_2 M$ est déterminé comme les autres perturbations, tandis que $\delta_1 M$ est l'intégrale seconde de $\frac{d\delta n}{dt}$, et, par suite, est fourni par la même table d'intégration que δn, à la condition d'y inscrire les sommes secondes.

Pour avoir une valeur approchée de $\delta_1 M$ permettant le calcul des seconds membres, on appliquera cette fois la formule

$$u_{n+1} = \Delta^{-2} y_{n+2} + \frac{1}{12}(y_n + \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \Delta^4 y_{n-4} + \ldots)$$
$$- \frac{1}{240}\Delta^2 y_{n-2} - \frac{1}{120}\Delta^3 y_{n-3} - \frac{145}{12096}\Delta^4 y_{n-4} - \ldots.$$

Enfin, pour mettre le calcul en train, on appliquera les règles du n° 62, la petitesse des perturbations initiales rendant les opérations très rapides. Les époques successives étant t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, ..., on calculera d'abord les valeurs des seconds membres (y) des équations à intégrer pour l'époque t_0, à l'aide des éléments osculateurs initiaux donnés. On en déduira des valeurs approchées des éléments, et par suite des (y), pour les époques t_{-1} et t_1; ces valeurs approchées suffiront généralement pour commencer le calcul définitif, sans qu'il soit indispensable de reprendre les déterminations déjà faites.

On peut aussi bien supposer que l'époque d'osculation initiale, désignée jusqu'ici par t_0, soit représentée par $t_{-\frac{1}{2}}$, en faisant le changement d'indices nécessaire. On commence alors de la même façon, en calculant les (y) pour $t_{-\frac{1}{2}}$, et l'on en déduit des valeurs approchées des éléments pour les époques t_{-1} et t_0 : avec ces valeurs, on pourra commencer le calcul définitif.

Dans bien des cas, l'application des règles générales précédentes pourra être simplifiée, comme nous le verrons dans l'exemple numérique traité plus loin au n° 74.

70. Examinons maintenant la seconde des méthodes générales indiquées au n° 64, en suivant les conceptions fondamentales de Hansen.

Tout d'abord, les éléments i et ϑ, ou plutôt i, ϑ', σ, sont déterminés de la même façon que précédemment. Puis, avec des éléments képlériens à déterminer, par exemple M_1, e_1, a_1, ϖ'_1, suivant les notations ordinaires, auxquels correspond une anomalie vraie v_1, on doit retrouver simplement le rayon vecteur r et la longitude dans l'orbite f', définis par les équations (5); c'est-à-dire que l'on doit avoir, en introduisant la variable auxiliaire h,

$$\frac{dv_1}{dt} + \frac{d\varpi'_1}{dt} = \frac{h}{r^2}, \qquad \frac{dh}{dt} = r F_p,$$
$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{k^2}{r^2} + F_r.$$

On peut, par suite, établir entre les inconnues deux relations arbitrairement choisies; c'est ce que l'on fait en supposant constante l'excentricité e_1, que nous appellerons alors e_0; et en supposant de même constante la quantité $r^2 \frac{dv_1}{dt}$, qui sera égale à h_0.

Dans ces conditions, on a d'abord

$$\frac{dh}{dt} = r F_p, \qquad \frac{d\varpi'_1}{dt} = \frac{h - h_0}{r^2},$$

et il ne reste plus qu'à former les équations qui déterminent M_1 et a_1. Appelons a_0 et n_0 le demi-grand axe et le moyen mouvement constants qui sont liés à e_0 et h_0 par les relations képlériennes

$$n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2} = h_0, \qquad n_0^2 a_0^3 = k^2;$$

substituons à M_1 et a_1 deux autres variables t_1 et α telles que, M_{00} et t_0 étant deux constantes, on ait

$$M_1 = n_0(t_1 - t_0) + M_{00}, \qquad a_1 = \alpha a_0,$$

et considérons l'orbite définie par a_0, e_0 avec M_{00} comme anomalie moyenne de l'époque t_0 : v_1 est l'anomalie vraie qui correspond dans cette orbite à l'époque t_1, et si r_1 est le rayon vecteur associé, on a simplement $r = \alpha r_1$.

Les quantités v_1 et r_1 dépendent du temps uniquement par l'inter-

médiaire de t_1, et l'on a par les équations (5) elles-mêmes appliquées au mouvement képlérien :

$$\frac{dv_1}{dt_1} = \frac{h_0}{r_1^2}, \qquad \frac{d^2 r_1}{dt_1^2} = \frac{h_0^2}{r_1^3} - \frac{k^2}{r_1^2}.$$

En comparant la première de ces équations à la relation choisie

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{h_0}{r^2},$$

on a, d'abord, pour déterminer t_1, la formule

$$\frac{dt_1}{dt} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

D'autre part, en différentiant la relation $\frac{r}{\alpha} = r_1$, et profitant du dernier résultat obtenu, il vient

$$\alpha \frac{dr}{dt} - r \frac{d\alpha}{dt} = \alpha^2 \frac{dr_1}{dt} = \frac{dr_1}{dt_1},$$

de sorte qu'une nouvelle différentiation, faite dans les mêmes conditions, donne

$$\alpha \frac{d^2 r}{dt^2} - r \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2 r_1}{dt_1^2}.$$

Remplaçant alors $\frac{d^2 r}{dt^2}$ et $\frac{d^2 r_1}{dt_1^2}$ par leurs valeurs indiquées ci-dessus, on a finalement, pour déterminer α, l'équation

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{(1-\alpha)k^2}{r^3} + \frac{\alpha(h^2 - h_0^2)}{r^4} + \frac{\alpha F_r}{r}.$$

Adoptons les notations et conventions du n° 68, sauf en ce qui concerne U, V, W, que nous définissons ici par les formules

$$U = \frac{\alpha F_r}{r} = \frac{k^2 m_j}{r_1}\left(Q_j \xi_j - \frac{r}{r_j^3}\right),$$

$$V = \frac{r F_p}{h_0} = \frac{k^2 m_j r}{h_0} Q_j \eta_j,$$

$$W = \frac{r F_n}{h} = \frac{k^2 m_j r}{h} Q_j \zeta_j;$$

on aura, pour résoudre le problème actuel, l'ensemble d'équa-

tions

$$(11)\quad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{di}{dt} = \cos g\,\mathrm{W}, & \dfrac{d\vartheta'}{dt} = \cot i \sin g\,\mathrm{W}, & \dfrac{d\sigma}{dt} = \operatorname{tang}\dfrac{i}{2}\sin g\mathrm{W}, \\ \dfrac{dh}{dt} = h_0\mathrm{V}, & \dfrac{d\varpi'_1}{dt} = \dfrac{h - h_0}{r^2}, & \dfrac{dt_1}{dt} = \dfrac{1}{\alpha^2}, \\ & \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = \dfrac{(1-\alpha)k^2}{r^3} + \dfrac{\alpha(h^2 - h_0^2)}{r^4} + \mathrm{U}, & \end{array} \right.$$

avec

$$r = \alpha r_1, \qquad g = v_1 + \varpi'_1 - \vartheta'.$$

Bien entendu, les constantes arbitraires introduites par l'intégration et celles qui figurent déjà dans les équations mêmes se réduiront en réalité à six distinctes.

Comme précédemment, si l'inclinaison était assez petite pour donner lieu à des difficultés de calcul, on remplacerait i et ϑ' par $\sin i \sin\vartheta'$ et $\sin i \cos\vartheta'$.

Ces équations conviennent aussi bien au cas des orbites planétaires qu'à celui des orbites cométaires. Dans le premier cas, il sera préférable de remplacer t_1 par M_1, en écrivant

$$(11^a)\qquad \frac{d\mathrm{M}_1}{dt} = \frac{n_0}{\alpha^2};$$

r_1 et v_1 seront calculés avec les éléments M_1, a_0, e_0. Dans le second cas, si l'on appelle T_0 une constante remplaçant t_0 et M_{00}, on calculera r_1 et v_1 pour l'époque t_1, dans une orbite définie par l'excentricité e_0 et le paramètre p_0 tel que $h_0 = k\sqrt{p_0}$, l'époque du passage au périhélie étant T_0. On voit ainsi que dans cette méthode, comme d'ailleurs dans celles que nous devons encore exposer, les calculs relatifs aux orbites cométaires ne présenteront aucune difficulté spéciale, contrairement à ce qui arrive quand on emploie la méthode de la variation des éléments.

Pour appliquer les équations (11) au calcul numérique des perturbations, prenons pour les quantités a_0, e_0, ..., affectées de l'indice zéro, les éléments correspondants osculateurs au mouvement du point M à l'époque initiale t_0; et soient de même i_0, ϑ_0, ϖ_0 les valeurs initiales de i, ϑ', ϖ'_1, celle de σ étant nulle; enfin soit comme précédemment M_0 l'anomalie moyenne $n_0(t - t_0) + \mathrm{M}_{00}$ de l'époque t dans l'orbite osculatrice de l'époque t_0.

Faisons alors

$$i = i_0 + \delta i, \quad \Im' = \Im_0 + \delta\Im', \quad \varpi'_1 = \varpi_0 + \delta\varpi', \quad h = h_0(1 + \delta h), \quad \alpha = 1 + \delta\alpha,$$

et

$$M_1 = M_0 + \delta M \quad \text{ou bien} \quad t_1 = t + \delta t,$$

suivant qu'il s'agit d'une planète ou d'une comète. On aura

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\delta i}{dt} = \cos g\,W, \quad \frac{d\delta\Im'}{dt} = \cot i \sin g\,W, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \tang \frac{i}{2} \sin g\,W, \\
&\qquad\qquad \frac{d\delta h}{dt} = V, \quad \frac{d\delta\varpi'}{dt} = \frac{h_0\,\delta h}{r^2}, \\
&\frac{d^2\delta\alpha}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3}\delta\alpha + \frac{2\alpha h_0^2}{r^4}\left(1 + \frac{\delta h}{2}\right)\delta h + U, \\
&\frac{d\delta M}{dt} = -\frac{2n_0}{\alpha^2}\left(1 + \frac{\delta\alpha}{2}\right)\delta\alpha, \quad \text{ou} \quad \frac{d\delta t}{dt} = -\frac{2}{\alpha^2}\left(1 + \frac{\delta\alpha}{2}\right)\delta\alpha.
\end{aligned}\right.$$

Chacune des nouvelles inconnues est de l'ordre des forces perturbatrices, et s'annule pour $t = t_0$; de même la dérivée $\frac{d\delta\alpha}{dt}$ est nulle évidemment pour $t = t_0$.

L'usage de ces équations très simples n'appelle aucune observation qui n'ait déjà été faite précédemment. Toutefois, pour calculer le second membre de l'équation qui donne $\frac{d^2\delta\alpha}{dt^2}$, on a besoin de la valeur même de $\delta\alpha$; et si le coefficient $-\frac{k^2}{r^3}$ n'est pas suffisamment petit, on peut craindre que la valeur approchée obtenue pour $\delta\alpha$ par l'application de la formule ordinaire (les notations étant toujours les mêmes que précédemment)

$$\begin{aligned}
u_{n+1} = \Delta^{-2} y_{n+2} &+ \frac{1}{12}(y_n + \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \Delta^4 y_{n-4} + \ldots) \\
&- \frac{1}{240}\Delta^2 y_{n-2} - \frac{1}{120}\Delta^3 y_{n-3} - \frac{145}{12096}\delta^4 y_{n-4} - \ldots
\end{aligned}$$

n'offre pas une précision suffisante. Dans ce cas, exceptionnel en réalité, on pourra employer avantageusement l'artifice indiqué au n° 62; en écrivant l'équation sous la forme

$$\frac{d^2\delta\alpha}{dt^2} = A - a\,\delta\alpha,$$

de sorte que $a = \frac{k^2}{r^3}$, on se servira pour calculer le second membre

de la formule

$$y_{n+1} = \frac{A_{n+1} - \alpha_{n+1}\left(\Delta^{-2}y_{n+2} - \frac{1}{240}\Delta^2 y_{n-2} - \frac{1}{120}\Delta^3 y_{n-3} - \frac{145}{12096}\Delta^4 y_{n-4} - \ldots\right)}{1 + \frac{\alpha_{n+1}}{12}}$$

Il ne reste plus qu'à indiquer la façon de retrouver les éléments osculateurs proprement dits pour l'époque t. Le paramètre p est d'abord égal à $\frac{h^2}{k^2}$, et pour plus de précision, on peut écrire

$$p = p_0 + 2p_0\left(1 + \frac{\delta h}{2}\right)\delta h.$$

Le rayon vecteur r est connu; sa dérivée r' par rapport au temps résulte d'une formule écrite plus haut

$$r' = r_1\frac{d\alpha}{dt} + \frac{1}{\alpha}\frac{dr_1}{dt_1},$$

c'est-à-dire, d'après les lois du mouvement képlérien,

$$r' = r_1\frac{d\alpha}{dt} + \frac{k}{\alpha\sqrt{p_0}}e_0\sin v_1;$$

la dérivée $\frac{d\alpha}{dt}$ est fournie par la table d'intégration relative à $\delta\alpha$.

On peut alors déterminer l'excentricité et l'anomalie vraie osculatrices par les équations connues

$$e\sin v = \frac{r'\sqrt{p}}{k},$$

$$e\cos v = \frac{p}{r} - 1,$$

qui, écrites sous la forme

$$e\sin v = e_0\sin v_1 + e_0\sin v_1\frac{\delta h - \delta\alpha}{\alpha} + r_1\frac{\sqrt{p}}{k}\frac{d\alpha}{dt},$$

$$e\cos v = e_0\cos v_1 + \frac{p - p_0}{r} - p_0\frac{\delta\alpha}{r},$$

permettent la détermination directe des différences $v - v_1$, $e - e_0$, par les procédés connus, rappelés au paragraphe suivant.

Enfin, le calcul s'achève par la recherche de a et n, si l'on veut, et par celle de l'anomalie moyenne M, ou de l'époque du passage au

périhélie T; en dernier lieu, on a pour définir ϖ' la relation

$$v + \varpi' = v_1 + \varpi'_1.$$

Comme nous l'avons déjà dit, on exécutera les différentes opérations indiquées avec le nombre de chiffres nécessaire pour obtenir une approximation satisfaisante.

71. La troisième méthode indiquée au n° 65 est semblable à la précédente dans ses points essentiels. Choisissons un plan fixe P_0, défini par son inclinaison i_0 et la longitude Ω_0 de son nœud ascendant N_0 par rapport au plan de coordonnées Oxy. Soit M′ la projection du point M sur le plan P_0; le point M est défini : 1° par le rayon vecteur accourci OM′ ou ρ; 2° par sa longitude λ, comptée dans le plan P_0 à partir de ON_0, égale à l'angle de ON_0 avec OM′; 3° par sa cote ζ au-dessus du plan P_0, égale à la longueur de M′M. En appelant F_ρ, F_σ, F_ζ les projections de la force perturbatrice sur OM′, sur la perpendiculaire à OM′ menée dans le plan P_0, et sur la normale à ce plan, les équations du mouvement de M sont, d'après le n° 65, avec l'introduction d'une variable auxiliaire η :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{\eta^2}{\rho^3} - \frac{k^2\rho}{r^3} + F_\rho, \\ &\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\eta}{\rho^2}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \rho F_\sigma, \\ &\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\frac{k^2\zeta}{r^3} + F_\zeta. \end{aligned}\right.$$

Imaginons maintenant que la position du point M′ résulte de certains éléments képlériens qui sont d'abord i_0, Ω_0, puis, comme ci-dessus, M_1, e_1, a_1, ω_1, en désignant par cette dernière lettre la longitude du périhélie comptée dans P_0 à partir de ON_0; soit de plus v_1 l'anomalie vraie correspondante.

Il faut déterminer M_1, e_1, a_1, ω_1, de façon à retrouver ρ comme rayon vecteur, et à avoir $\lambda = v_1 + \omega_1$. On dispose par suite de deux relations arbitraires entre les inconnues; on les choisit de façon que l'excentricité e_1 ait une valeur constante e_0, et que la quantité $\rho^2 \frac{dv_1}{dt}$ ait aussi une valeur constante η_0, de sorte que l'on a en premier lieu

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{\eta - \eta_0}{\rho^2}.$$

Si n_0 et a_0 sont liés à e_0 et η_0 par les relations

$$n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2} = \eta_0, \qquad n_0^2 a_0^3 = k^2,$$

faisons, exactement comme au numéro précédent,

$$M_1 = n_0(t_1 - t_0) + M_{00}, \qquad a_1 = \alpha a_0,$$

et substituons t_1, α à M_1, a_1 ; on a ici $\rho = \alpha r_1$, en nommant r_1 le rayon vecteur associé à v_1 dans l'orbite d'éléments a_0, e_0, M_1. Raisonnant alors de la même façon, on obtient immédiatement pour déterminer les inconnues t_1 et α les deux équations

$$\frac{dt_1}{dt} = \frac{1}{\alpha^2},$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = k^2\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{\alpha}{r^3}\right) + \frac{\alpha(\eta^2 - \eta_0^2)}{\rho^4} + \frac{\alpha F_\rho}{\rho}.$$

En faisant ici

$$U = \frac{\alpha F_\rho}{\rho}, \qquad V = \frac{\rho F_\sigma}{\eta_0}, \qquad W = F_\zeta,$$

on a finalement l'ensemble d'équations :

$$(12) \quad \begin{cases} \dfrac{d\eta}{dt} = \eta_0 V, \qquad \dfrac{d\omega_1}{dt} = \dfrac{\eta - \eta_0}{\rho^2}, \qquad \dfrac{dt_1}{dt} = \dfrac{1}{\alpha^2}, \\[2mm] \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = \dfrac{(1-\alpha)k^2}{r^3} + k^2\left(\dfrac{1}{\rho^3} - \dfrac{1}{r^3}\right) + \dfrac{\alpha(\eta^2 - \eta_0^2)}{\rho^4} + U, \\[2mm] \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = -\dfrac{k^2\zeta}{r^3} + W. \end{cases}$$

Pour calculer $\frac{1}{r^3}$, posons

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{\rho^3}(1 - \gamma);$$

comme on a

$$r^2 = \rho^2 + \zeta^2,$$

la quantité γ sera égale à

$$1 - \left(1 + \frac{\zeta^2}{\rho^2}\right)^{-\frac{3}{2}};$$

et en faisant encore

$$\gamma = \frac{3}{2}\frac{\zeta^2}{\rho^2}\gamma',$$

le facteur γ' sera donné par le développement en série

$$\gamma' = 1 - \frac{5}{4}\frac{\zeta^2}{\rho^2} + \frac{5.7}{4.6}\frac{\zeta^4}{\rho^4} - \ldots;$$

la différence $\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r^3}$ sera égale elle-même à $\frac{3}{2}\frac{\zeta^2}{\rho^5}\gamma'$.

Comme le rapport $\frac{\zeta}{\rho}$, égal à $\tang\beta$, si l'on désigne par β la latitude de M au-dessus du plan P_0, est pratiquement très petit, on pourra presque toujours confondre γ' avec l'unité ; si une plus grande approximation devenait nécessaire, on aurait très exactement $\gamma' = \cos^{\frac{5}{2}}\beta$, puisque l'on a

$$\gamma' = \cos^{\frac{5}{2}}\beta\left(1 + \frac{5}{96}\tang^4\beta + \ldots\right).$$

Pour calculer U, V, W, reportons-nous aux conventions et notations du n° 68 ; les coordonnées r_j, λ_j, β_j ayant toujours la même signification, soient ξ_j, η_j, ζ_j les coordonnées de M_j par rapport à des axes ayant pour origine le point M et parallèles respectivement à OM′, à la perpendiculaire à OM′ située dans le plan P_0, et à la normale à ce plan. On aura

$$U = \frac{k^2 m_j}{r_1}\left(Q_j\xi_j - \frac{\rho}{r_j^3}\right),$$

$$V = \frac{k^2 m_j \rho}{\eta_0} Q_j \eta_j,$$

$$W = k^2 m_j\left(Q_j\zeta_j - \frac{\zeta}{r_j^3}\right),$$

en faisant toujours

$$Q_j = \frac{1}{\Delta_j^3} - \frac{1}{r_j^3}, \qquad \Delta_j^2 = \xi_j^2 + \eta_j^2 + \zeta_j^2.$$

De plus, on aura évidemment :

$$\xi_j = \mu_j\cos\lambda + \nu_j\sin\lambda - \rho,$$
$$\eta_j = -\mu_j\sin\lambda + \nu_j\cos\lambda,$$
$$\zeta_j = r_j[\cos i_0\sin\beta_j - \sin i_0\cos\beta_j\sin(\lambda_j - \vartheta_0)] - \zeta,$$

avec

$$\mu_j = r_j\cos\beta_j\cos(\lambda_j - \vartheta_0),$$
$$\nu_j = r_j[\sin i_0\sin\beta_j + \cos i_0\cos\beta_j\sin(\lambda_j - \vartheta_0)].$$

Pour appliquer les équations (12) au calcul numérique des pertur-

bations, on prendra pour i_0, ϑ_0, a_0, e_0, ... les éléments correspondants osculateurs au mouvement du point M à l'époque initiale t_0 ; soient de plus ω_0 la valeur osculatrice de l'élément ω, distance du périhélie au nœud, et M_0 l'anomalie moyenne de l'époque t dans l'orbite osculatrice de l'époque t_0.

En faisant

$$\omega_1 = \omega_0 + \delta\omega, \qquad \eta = \eta_0(1 + \delta\eta), \qquad \alpha = 1 + \delta\alpha,$$

et

$$M_1 = M_0 + \delta M, \qquad \text{ou bien} \qquad t_1 = t + \delta t,$$

suivant qu'il s'agit d'une planète ou d'une comète, on aura

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\delta\eta}{dt} = V, \qquad \frac{d\delta\omega}{dt} = \frac{\eta_0\,\delta\eta}{\rho^2},\\ &\frac{d^2\delta\alpha}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3}\delta\alpha + \frac{3}{2}k^2\frac{\zeta^2}{\rho^5}\gamma' + \frac{2\alpha\eta_0^2}{\rho^4}\left(1 + \frac{\delta\eta}{2}\right)\delta\eta + U,\\ &\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\frac{k^2\zeta}{r^3} + W,\\ &\frac{d\delta M}{dt} = -\frac{2n_0}{\alpha^2}\left(1 + \frac{\delta\alpha}{2}\right)\delta\alpha, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\delta t}{dt} = -\frac{2}{\alpha^2}\left(1 + \frac{\delta\alpha}{2}\right)\delta\alpha. \end{aligned}\right.$$

On a d'ailleurs

$$\lambda = v_1 + \omega_1, \qquad \rho = \alpha r_1, \qquad \frac{1}{r^3} = \frac{1}{\rho^3}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\zeta^2}{\rho^2}\gamma'\right),$$

et v_1, r_1 sont calculés dans l'orbite définie par a_0, e_0, M_1 ; ou bien, s'il s'agit d'une comète, dans l'orbite définie par p_0, e_0, T_0, pour l'époque t_1.

Chacune des nouvelles inconnues est de l'ordre des forces perturbatrices, et s'annule pour $t = t_0$, comme aussi les dérivées $\frac{d\delta\alpha}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$.

L'usage des équations précédentes n'appelle aucune observation nouvelle : il suffira de se conformer aux différentes règles déjà posées.

Examinons maintenant comment se fera le retour aux éléments osculateurs proprement dits, désignés comme toujours par i, ϑ, ...

Soient V_ρ, V_σ, V_ζ les projections de la vitesse de M sur les axes déjà définis qui portent les composantes F_ρ, F_σ, F_ζ de la force perturbatrice, de sorte que

$$V_\rho = \frac{d\rho}{dt}, \qquad V_\sigma = \rho\frac{d\lambda}{dt}, \qquad V_\zeta = \frac{d\zeta}{dt};$$

les projections sur ces même axes du moment h de la vitesse par rapport à l'origine sont alors respectivement

$$-\rho\zeta\frac{d\lambda}{dt}, \qquad \zeta\frac{d\rho}{dt}-\rho\frac{d\zeta}{dt}, \qquad \rho^2\frac{d\lambda}{dt};$$

et par suite, si l'on appelle i_1 et $\Im_1$ l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant du plan P de l'orbite instantanée par rapport au plan fixe P_0, $\Im_1$ étant comptée comme λ à partir de ON_0, on a, d'après les valeurs de h et de η,

$$k\sqrt{p}\sin i_1 \sin(\lambda-\Im_1)=\eta\frac{\zeta}{\rho},$$

$$k\sqrt{p}\sin i_1 \cos(\lambda-\Im_1)=\rho\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\rho}{dt},$$

$$k\sqrt{p}\cos i_1=\eta.$$

On déterminera donc d'abord i_1 et $\Im_1$ par les deux formules

$$\operatorname{tang} i_1 \sin(\lambda-\Im_1)=\frac{\zeta}{\rho},$$

$$\operatorname{tang} i_1 \cos(\lambda-\Im_1)=\frac{\rho\dfrac{d\zeta}{dt}-\zeta\dfrac{d\rho}{dt}}{\eta};$$

comme précédemment, on a d'ailleurs

$$\frac{d\rho}{dt}=r_1\frac{d\alpha}{dt}+\frac{k}{\alpha\sqrt{p_0}}e_0\sin v_1,$$

et les dérivées $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ sont fournies par les tables d'intégration relatives à α, ζ.

L'angle $\Im_1$ est nécessairement mal déterminé : mais, comme nous le verrons, il n'en résulte aucun inconvénient.

On pourra ensuite, en remplaçant η par $k\sqrt{p_0}(1+\delta\eta)$, déterminer le paramètre p par la relation

$$\sqrt{p}=\sqrt{p_0}\,\text{séc}\,i_1(1+\delta\eta),$$

que l'on peut écrire encore sous la forme

$$\sqrt{p}-\sqrt{p_0}=\sqrt{p_0}\,\text{séc}\,i_1\left(\delta\eta+2\sin^2\frac{i_1}{2}\right),$$

ou bien

$$p-p_0=p_0\,\text{séc}^2\,i_1\left[2\left(1+\frac{\delta\eta}{2}\right)\delta\eta+\sin^2 i_1\right].$$

En même temps, on calculera l'argument g_1 de la latitude dans le plan P rapporté au plan P_0, par la formule

$$\operatorname{tang} g_1 = \operatorname{séc} i_1 \operatorname{tang}(\lambda - \vartheta_1);$$

ou plutôt, on déterminera avec précision la différence

$$d = g_1 - (\lambda - \vartheta_1),$$

en utilisant le développement en série bien connu équivalent

$$d = \operatorname{tang}^2 \frac{i_1}{2} \sin 2(\lambda - \vartheta_1) + \frac{1}{2} \operatorname{tang}^4 \frac{i_1}{2} \sin 4(\lambda - \vartheta_1) + \ldots;$$

en raison de l'extrême petitesse de i_1, ce développement pourra généralement être réduit à son premier terme.

On trouve alors les éléments i et ϑ, ainsi que l'argument proprement dit de la latitude, soit g, par la considération du triangle formé sur une sphère de centre O par les traces des plans P, P_0 et Oxy; les côtés opposés aux angles $\pi - i$, i_0, i_1 de ce triangle étant respectivement ϑ_1, $g - g_1$, $\vartheta - \vartheta_0$, on peut employer les formules

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(g - g_1 + \vartheta - \vartheta_0) = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \vartheta_1 \frac{\cos \frac{1}{2}(i_0 - i_1)}{\cos \frac{1}{2}(i_0 + i_1)},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(g - g_1 - \vartheta + \vartheta_0) = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \vartheta_1 \frac{\sin \frac{1}{2}(i_0 - i_1)}{\sin \frac{1}{2}(i_0 + i_1)},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(i - i_0) = \operatorname{tang} \frac{1}{2} i_1 \frac{\cos \frac{1}{2}(g - g_1 + \vartheta_1)}{\cos \frac{1}{2}(g - g_1 - \vartheta_1)}.$$

En faisant

$$d' = \frac{1}{2}(g - g_1 + \vartheta - \vartheta_0 - \vartheta_1), \qquad d'' = \frac{1}{2}(g - g_1 - \vartheta + \vartheta_0 - \vartheta_1),$$

on a ces quantités avec précision par les développements suivants, analogues à celui de d,

$$d' = \operatorname{tang} \frac{i_0}{2} \operatorname{tang} \frac{i_1}{2} \sin \vartheta_1 + \frac{1}{2} \operatorname{tang}^2 \frac{i_0}{2} \operatorname{tang}^2 \frac{i_1}{2} \sin 2\vartheta_1 + \ldots,$$

$$d'' = -\cot \frac{i_0}{2} \operatorname{tang} \frac{i_1}{2} \sin \vartheta_1 + \frac{1}{2} \cot^2 \frac{i_0}{2} \operatorname{tang}^2 \frac{i_1}{2} \sin 2\vartheta_1 - \ldots,$$

et l'on en déduit

$$\vartheta - \vartheta_0 = d' - d'', \qquad g - \lambda = d + d' + d''.$$

On peut écrire aussi

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(i - i_0) = \operatorname{tang}\frac{i_1}{2}\frac{\cos\left(\vartheta_1 + \dfrac{d' + d''}{2}\right)}{\cos\dfrac{d' + d''}{2}},$$

et la petitesse de i_1 amène ici, comme dans les formules précédentes, des simplifications de calcul qu'il serait superflu de détailler.

Pour achever, il faut, comme précédemment, tirer l'excentricité et l'anomalie vraie osculatrices des formules

$$e\sin v = \frac{r'\sqrt{p}}{k},$$

$$e\cos v = \frac{p}{r} - 1,$$

r' désignant toujours la dérivée $\frac{dr}{dt}$: r est connu, comme nous l'avons déjà dit, et l'on obtient r' par la relation évidente

$$rr' = \rho\frac{d\rho}{dt} + \zeta\frac{d\zeta}{dt},$$

qui donne, d'après la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$,

$$r' = \frac{\rho r_1}{r}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\zeta}{r}\frac{d\zeta}{dt} + \frac{kr_1}{r\sqrt{p_0}}e_0\sin v_1.$$

Enfin, on déterminera a et n, si l'on veut, puis l'anomalie moyenne M, ou l'époque du passage au périhélie, T, suivant le cas; et l'on aura le dernier élément ω en prenant la différence $g - v$, égale à $\omega_1 + (g - \lambda) - (v - v_1)$.

Tous ces calculs se feront aisément avec l'exactitude voulue, en ayant soin de se conformer aux indications données à la fin du n° 67. Pour obtenir directement les différences $v - v_1$ et $e - e_0$, on fera

$$e\sin v = e_0\sin v_1 + \varepsilon\sin\chi,$$

$$e\cos v = e_0\cos v_1 + \varepsilon\cos\chi,$$

de façon à avoir, comme l'on sait,

$$\operatorname{tang}(v - v_1) = \frac{\varepsilon \sin(\chi - v_1)}{e_0 + \varepsilon \cos(\chi - v_1)},$$

$$e - e_0 = \varepsilon \cos\left(\chi - \frac{v + v_1}{2}\right) \operatorname{séc} \frac{v - v_1}{2}.$$

On trouve alors sans peine

$$\varepsilon \sin\chi = \frac{r_1}{r} e_0 \sin v_1 \left(\frac{\sqrt{p} - \sqrt{p_0}}{\sqrt{p_0}} - \frac{r - r_1}{r_1}\right) + \frac{\sqrt{p}}{kr}\left(\rho\, r_1 \frac{d\alpha}{dt} + \zeta \frac{d\zeta}{dt}\right),$$

$$\varepsilon \cos\chi = \frac{p_0}{r}\left(\frac{p - p_0}{p_0} - \frac{r - r_1}{r_1}\right);$$

nous avons déjà vu quelles étaient les valeurs de $\frac{\sqrt{p} - \sqrt{p_0}}{\sqrt{p_0}}$ et de $\frac{p - p_0}{p_0}$; quant à celle de $\frac{r - r_1}{r_1}$, elle est égale à $\alpha \operatorname{séc}\beta - 1$, c'est-à-dire à $\delta\alpha + 2\alpha \sin^2\frac{\beta}{2} \operatorname{séc}\beta$, en appelant toujours β la latitude de M au-dessus du plan P_0.

On a ainsi tous les éléments du calcul sous la forme la plus convenable.

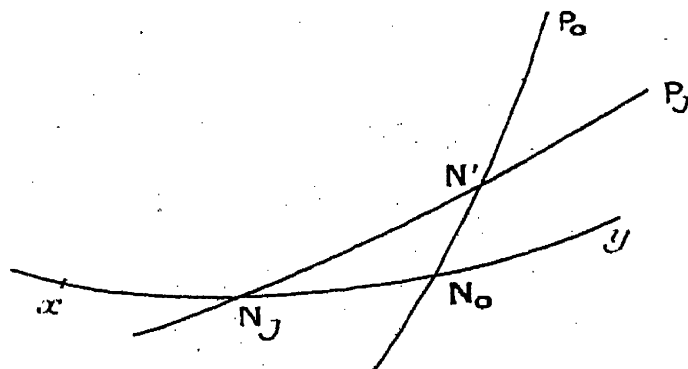
La méthode que nous venons de développer est celle dite de Hansen-Tietjen, modifiée et simplifiée dans un certain nombre de détails : elle offre d'assez grands avantages pratiques, en particulier dans le cas des comètes. Elle permet aussi de calculer avec la plus grande facilité une éphéméride, en tenant compte des perturbations.

Supposons en effet que l'on calcule par les formules du n° 25 les constantes équatoriales de Gauss $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, A, B, C qui correspondent à l'hypothèse $\omega = 0$, $i = i_0$, $\vartheta = \vartheta_0$; d'après leur signification même et celle des quantités ρ, λ, ζ, on aura pour calculer les coordonnées équatoriales du point M les formules simples

$$x_1 = \rho \sin a \sin(A + \lambda) + \zeta \cos a,$$
$$y_1 = \rho \sin b \sin(B + \lambda) + \zeta \cos b,$$
$$z_1 = \rho \sin c \sin(C + \lambda) + \zeta \cos c.$$

Notons encore que l'on peut obtenir une certaine simplification dans le calcul des coordonnées ξ_j, η_j, ζ_j, en opérant de la façon suivante. Soit P_j un plan fixe défini par son inclinaison i_j et la longitude ϑ_j de son nœud ascendant N_j sur le plan Oxy; soit de plus ω_j

l'inclinaison du plan P_0 sur le plan P_j, et N′ le nœud ascendant correspondant. Dans le triangle N_jN_0N' déterminé sur la sphère de centre O par les traces des plans Oxy, P_j, P_0 (*fig.* 5), faisons

Fig. 5.

$N_0N' = \varphi_j$, $N_jN' = \psi_j - \Im_j$; il est facile de déterminer une fois pour toutes les quantités φ_j, ψ_j, ω_j, par exemple par les formules

$$\begin{aligned}
\sin\omega_j \sin\varphi_j &= \sin i_j \sin(\Im_0 - \Im_j),\\
\sin\omega_j \cos\varphi_j &= \sin i_0 \cos i_j - \cos i_0 \sin i_j \cos(\Im_0 - \Im_j),\\
\cos\omega_j &= \cos i_0 \cos i_j + \sin i_0 \sin i_j \cos(\Im_0 - \Im_j),\\
\sin\omega_j \sin(\psi_j - \Im_j) &= \sin i_0 \sin(\Im_0 - \Im_j),\\
\sin\omega_j \cos(\psi_j - \Im_j) &= -\cos i_0 \sin i_j + \sin i_0 \cos i_j \cos(\Im_0 - \Im_j).
\end{aligned}$$

Désignons alors par λ'_j la longitude du point M_j, comptée à partir de Ox jusqu'à ON_j dans le plan Oxy, puis à partir de ON_j dans le plan P_j; et par β'_j la latitude du même point par rapport à P_j. On aura pour calculer ξ_j, η_j, ζ_j le même ensemble de formules que ci-dessus, à la condition de remplacer partout i_0 par ω_j, β_j par β'_j, $\lambda_j - \Im_0$ par $\lambda'_j - \psi_j$, λ par $\lambda - \varphi_j$.

Si l'on prend pour le plan P_j un plan voisin de l'orbite instantanée du point M_j, la latitude β'_j est très petite et souvent négligeable; et c'est de là que résulte la simplification de calcul annoncée.

On trouve précisément dans les éphémérides les valeurs des quantités λ'_j, β'_j, $\Im_j$, i_j pour les quatre plus grosses planètes; le choix du plan fixe P_j reste le même pendant les dix années les plus voisines du commencement de chaque année décadaire, comme celui de l'équinoxe fondamental auquel on doit rapporter tous les éléments.

72. Dans la quatrième des méthodes classées au n° 64, on peut chercher à déterminer directement les variables r, g, $\mathfrak{S}$, i, des équations (4), qui, avec h comme inconnue auxiliaire, définissent peut-être de la meilleure façon le mouvement du point M.

Si l'on marque de l'indice zéro les éléments osculateurs à la trajectoire de M pour l'époque t_0, et que l'on appelle r_0, v_0, g_0, le rayon vecteur, l'anomalie vraie et l'argument de la latitude qui en résultent pour l'époque t, on a, en faisant $h_0 = k\sqrt{p_0}$,

$$\frac{d^2 r_0}{dt^2} = \frac{h_0^2}{r_0^3} - \frac{k^2}{r_0^2}, \qquad \frac{dg_0}{dt} = \frac{h_0}{r_0^2},$$

d'après les équations (4) elles-mêmes.

Posant donc

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0 + \delta\mathfrak{S}, \quad i = i_0 + \delta i, \quad h = h_0(1 + \delta h), \quad g = g_0 + \delta g, \quad r = r_0 + \delta r,$$

les équations propres à déterminer ces nouvelles inconnues sont

$$\frac{d\,\delta\mathfrak{S}}{dt} = \operatorname{coséc} i \sin g \frac{r\mathrm{F}_n}{h}, \qquad \frac{di}{dt} = \cos g \frac{r\mathrm{F}_n}{h},$$

$$\frac{d\,\delta h}{dt} = \frac{r}{h_0}\mathrm{F}_p, \qquad \frac{d\,\delta g}{dt} = \frac{h}{r^2} - \frac{h_0}{r_0^2} - \cos i \frac{d\mathfrak{S}}{dt},$$

$$\frac{d^2\,\delta r}{dt^2} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{h_0^2}{r_0^3} - \frac{k^2}{r^2} + \frac{k^2}{r_0^2} + \mathrm{F}_r.$$

Dans les seconds membres des deux dernières de ces équations, il faut mettre en évidence les perturbations δr, δh; en écrivant

$$\frac{h}{r^2} - \frac{h_0}{r_0^2} = \frac{h_0\,\delta h}{r^2} - \frac{h_0\,\delta r}{r^2 r_0^2}(2r_0 + \delta r),$$

$$\frac{h^2}{r^3} - \frac{h_0^2}{r_0^3} = \frac{h_0^2\,\delta h(2 + \delta h)}{r^3} - \frac{h_0^2\,\delta r}{r^3 r_0^3}[3rr_0 + (\delta r)^2],$$

$$\frac{k^2}{r_0^2} - \frac{k^2}{r^2} = \frac{k^2\,\delta r}{r^2 r_0^2}(2r_0 + \delta r);$$

puis, observant que l'on a

$$\frac{3h_0^2}{r_0} - 2k^2 = k^2(1 + 3e_0\cos v_0),$$

et posant ici

$$U = F_r, \qquad V = \frac{rF_p}{h_0}, \qquad W = \frac{rF_n}{h},$$

on a les équations définitives

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\,\delta\vartheta}{dt} = \operatorname{coséc} i \sin g\, W, \qquad \frac{d\,\delta i}{dt} = \cos g\, W, \qquad \frac{d\,\delta h}{dt} = V, \\ &\frac{d^2\,\delta r}{dt^2} = -\frac{k^2\,\delta r}{r^2 r_0}\left(1 + 3 e_0 \cos v_0\right) \\ &\qquad + \frac{2k^2 p_0\,\delta h}{r^3}\left(1 + \frac{\delta h}{2}\right) + \frac{k^2(\delta r)^2}{r^2 r_0^2}\left(1 - \frac{p_0\,\delta r}{r r_0}\right) + U, \\ &\frac{d\,\delta g}{dt} = \frac{k\sqrt{p_0}}{r^2}\left[\delta h - \frac{2\,\delta r}{r_0}\left(1 + \frac{\delta r}{2 r_0}\right)\right] - \cos i\,\frac{d\vartheta}{dt}; \end{aligned} \right.$$

les inconnues sont toutes nulles pour $t = t_0$, et aussi la dérivée $\frac{d\,\delta r}{dt}$.

Les quantités U, V, W se calculent exactement comme au n° 68, sauf que l'on a ici

$$U = k^2 m_j\left(Q_j \xi_j - \frac{r}{r_j^3}\right), \qquad V = \frac{k m_j r}{\sqrt{p_0}} Q_j \eta_j, \qquad W = \frac{k m_j r}{(1 + \delta h\sqrt{p_0}} Q_j \zeta_j.$$

L'intégration des équations (13), prises dans l'ordre où elles sont écrites, ne saurait présenter aucune difficulté, en tenant compte des observations déjà faites précédemment.

On peut substituer à l'argument de la latitude g la longitude dans l'orbite f, souvent avec avantage; il suffit pour cela de remplacer le dernier terme $-\cos i\,\frac{d\vartheta}{dt}$ de la dernière des équations (13) par $\operatorname{tang}\frac{i}{2}\sin g\,W$. On peut encore, si l'on veut, introduire f', ϑ' et σ au lieu de f et ϑ.

Si l'inclinaison i est très petite (et l'on peut réaliser ce cas en prenant pour plan fixe Oxy le plan de l'orbite osculatrice de l'époque t_0), on remplacera les inconnues ϑ, i, g par la longitude dans l'orbite f, et par les deux quantités

$$s = \sin i \sin g, \qquad s' = \sin i \cos g,$$

dont la première est le sinus de la latitude du point M. On trouve alors immédiatement, d'après les équations (4), les nouvelles équa-

tions correspondantes

$$\left\{\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{h}{r^2}s', \\ \frac{ds'}{dt} &= -\frac{h}{r^2}s + \cos i\, \mathrm{W}, \\ \frac{df}{dt} &= \frac{h}{r^2} + \frac{s}{2\cos^2\frac{i}{2}}\mathrm{W}, \end{aligned}\right.$$

et dans la dernière, on introduira δf comme précédemment.

Pour retourner aux éléments osculateurs, on a d'abord, en vertu de la valeur $k\sqrt{p}$ de h :

$$\sqrt{p} = \sqrt{p_0}\,(1 + \delta h),$$

c'est-à-dire encore

$$p - p_0 = 2p_0\,\delta h\left(1 + \frac{\delta h}{2}\right).$$

Ensuite, la comparaison des valeurs de r et r_0, et celle de leurs dérivées r' et r'_0, dont les différences sont respectivement δr et $\frac{d\delta r}{dt}$, cette dernière étant fournie par la table d'intégration relative à δr, donne

$$e\cos v = e_0\cos v_0 + \frac{p}{r} - \frac{p_0}{r_0},$$

$$e\sin v = e_0\sin v_0 + \frac{1}{k}\left(r'\sqrt{p} - r'_0\sqrt{p_0}\right),$$

c'est-à-dire finalement

$$e\sin v = e_0\sin v_0 + \delta h\, e_0\sin v_0 + \frac{\sqrt{p}}{k}\,\frac{d\delta r}{dt},$$

$$e\cos v = e_0\cos v_0 + \frac{p - p_0}{r} - \frac{p_0\,\delta r}{r r_0}.$$

On achève alors comme précédemment.

73. Enfin, dans la dernière des méthodes indiquées au n° **64**, le point M est déterminé par ses coordonnées rectangulaires x, y, z par rapport aux axes fixes, définies par les équations (1).

Si, comme précédemment, on marque de l'indice zéro les éléments osculateurs à la trajectoire de M pour l'époque t_0, et que l'on appelle x_0, y_0, z_0, r_0 les coordonnées rectangulaires et le rayon vecteur qui

en résultent pour l'époque t, on a

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -\frac{k^2x_0}{r_0^3}, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2x}{r^3} + F_x,$$

et les autres équations analogues relatives aux axes Oy, Oz.

Si donc on fait

$$x = x_0 + \xi, \qquad y = y_0 + \eta, \qquad z = z_0 + \zeta,$$

et que l'on remplace F_x, F_y, F_z par X, Y, Z, on a pour déterminer les inconnues ξ, η, ζ, des équations telles que

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = k^2\left(\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3}\right) + X, \qquad \ldots,$$

les inconnues et leurs dérivées premières $\frac{d\xi}{dt}$, ... étant nulles pour $t = t_0$.

Les fonctions X, Y, Z se calculent immédiatement; si x_j, y_j, z_j sont les coordonnées de l'astre perturbateur M_j de masse m_j, on a

$$X = \sum k^2 m_j\left(\frac{x_j - x}{\Delta_j^3} - \frac{x_j}{r_j^3}\right), \qquad \ldots,$$

avec

$$\Delta_j^2 = (x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2;$$

la sommation est étendue à tous les indices j.

Faisant $\frac{k^2}{r_0^3} = h$, les équations ci-dessus s'écrivent

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -h\xi + hx\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right) + X, \qquad \ldots,$$

et il est nécessaire de mettre en évidence les perturbations ξ, η, ζ dans la différence $1 - \frac{r_0^3}{r^3}$. A cet effet, on pose

$$r^2 = r_0^2(1 + 2q),$$

de sorte que

$$qr_0^2 = \xi\left(x_0 + \frac{\xi}{2}\right) + \eta\left(y_0 + \frac{\eta}{2}\right) + \zeta\left(z_0 + \frac{\zeta}{2}\right).$$

Dans ces conditions, on a

$$1 - \frac{r_0^3}{r^3} = 1 - (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}} = fq,$$

en faisant

$$f = 3\left(1 - \frac{5}{2}q + \frac{5.7}{2.3}q^2 - \frac{5.7.9}{2.3.4}q^3 + \dots\right).$$

La quantité q est toujours petite, inférieure par exemple à 0,03 en valeur absolue; il est alors facile de construire une table donnant $\log f$ en fonction de q : c'est la table d'Encke, du nom de l'astronome qui a donné toute sa valeur à la méthode que nous étudions actuellement. A défaut de table, on peut calculer f directement par la formule simple

$$f = \frac{2}{s}\left(1 + \frac{1}{s + \sqrt{s}}\right),$$

où l'on prend

$$s = 1 + 2q.$$

Plus simplement encore, on peut poser

$$\operatorname{tang}^2\theta = 2q \qquad \text{ou} \qquad \sin^2\theta = -2q,$$

suivant que q est positif ou négatif, et prendre en même temps

$$f = 3\left(\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{\cos\theta}\right)^{\frac{10}{3}} \qquad \text{ou} \qquad f = 3\left(\cos\frac{\theta}{2}\operatorname{séc}\theta\right)^{\frac{10}{3}};$$

ces formules ne sont qu'approchées, mais l'erreur ainsi commise est absolument négligeable dans les conditions de la pratique, puisque son terme principal est égal à $\frac{q^4}{24}$, ainsi qu'il est facile de le vérifier.

Les équations du problème prennent donc la forme

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= h(fqx - \xi) + X, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= h(fqy - \eta) + Y, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= h(fqz - \zeta) + Z, \end{aligned} \right.$$

avec

$$qr_0^2 = \xi\left(x_0 + \frac{\xi}{2}\right) + \eta\left(y_0 + \frac{\eta}{2}\right) + \zeta\left(z_0 + \frac{\zeta}{2}\right).$$

Les équations (14) seront intégrées d'après les règles du n° 62. Si le coefficient h, égal à $\frac{k^2}{r_0^3}$, est assez petit, le calcul des seconds membres se fera d'une façon suffisamment exacte en partant des valeurs appro-

chées obtenues par l'application de la formule d'extrapolation

$$u_{n+1} = \Delta^{-2}y_{n+2} + \frac{1}{12}(y_n + \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \Delta^4 y_{n-4} + \ldots)$$
$$- \frac{1}{240}\Delta^2 y_{n-2} - \frac{1}{120}\Delta^3 y_{n-3} - \frac{145}{12096}\Delta^4 y_{n-4} - \ldots,$$

dont la signification n'a pas besoin d'être expliquée à nouveau.

Dans le cas contraire, exceptionnel en réalité, comme nous l'avons déjà dit, et plus généralement, si l'on craint de n'avoir pas ainsi toute la précision désirable, il faudra employer un artifice analogue à celui que nous avons déjà rappelé précédemment à propos de la seconde méthode, à la fin du n° 70; mais la question se complique un peu en raison de la présence du facteur q, qui dépend des trois inconnues ξ, η, ζ.

Les valeurs approchées déterminées comme nous venons de le dire pour ξ, η, ζ seront toujours suffisantes pour calculer X, Y, Z, de même que les coefficients $x_0 + \frac{\xi}{2}$, $y_0 + \frac{\eta}{2}$, $z_0 + \frac{\zeta}{2}$ qui figurent dans l'expression de q, et aussi les valeurs x, y, z qui multiplient fq dans les seconds membres des équations (14).

Appelons plus brièvement ξ'', η'', ζ'' les dérivées $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$, et faisons

$$\xi = X' + \frac{\xi''}{12}, \qquad \eta = Y' + \frac{\eta''}{12}, \qquad \zeta = Z' + \frac{\zeta''}{12},$$

de sorte que les valeurs de X′, Y′, Z′ sont obtenues exactement par les formules telles que

$$X'_{n+1} = \Delta^{-2}\xi''_{n+2} - \frac{1}{240}\Delta^2\xi''_{n-2} - \frac{1}{120}\Delta^3\xi''_{n-3} - \frac{145}{12096}\Delta^4\xi''_{n-4} - \ldots;$$

en portant ces valeurs de ξ, η, ζ dans les équations (14), on a

$$\xi'' = \frac{h(fqx - X') + X}{1 + \frac{h}{12}}, \qquad \ldots,$$

et il ne reste plus qu'à déterminer q. Or, on a aussi

$$\xi = \frac{\frac{hfqx}{12} + \frac{X}{12} + X'}{1 + \frac{h}{12}}, \qquad \ldots,$$

tables d'intégration relatives aux équations (14), de sorte que l'on connaît x, y, z, x', y', z'.

On peut alors calculer directement les éléments osculateurs correspondants par les formules du n° 27 : c'est le procédé le plus simple et souvent aussi le plus avantageux, à la condition de prendre les précautions nécessaires déjà indiquées précédemment à la fin du n° 67. Voici les formules à appliquer, où l'on a rétabli comme il convient la valeur de k :

$$\begin{aligned}
k\sqrt{p}\sin i\sin\vartheta &= yz' - zy',\\
k\sqrt{p}\sin i\cos\vartheta &= xz' - zx',\\
k\sqrt{p}\cos i &= xy' - yx';
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r\sin g &= z\,\text{coséc}\,i,\\
r\cos g &= x\cos\vartheta + y\sin\vartheta;
\end{aligned}$$

$$e\sin v = \frac{r'\sqrt{p}}{k} = \frac{(xx'+yy'+zz')\sqrt{p}}{kr}, \qquad e\cos v = \frac{p}{r} - 1,$$

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{x'^2+y'^2+z'^2}{k^2};$$

ces équations se réduisent d'ailleurs à six distinctes. De l'anomalie vraie v, on déduira l'anomalie moyenne M ou le temps du passage au périhélie, suivant le cas; et enfin l'on aura

$$\omega = g - v.$$

Si l'on veut exprimer directement les perturbations des éléments à l'aide de celles des coordonnées et des projections de la vitesse, faisons d'abord

$$\begin{aligned}
k\mathrm{P} &= y\,\delta z' - z\,\delta y' + z'_0\,\delta y - y'_0\,\delta z,\\
k\mathrm{Q} &= x\,\delta z' - z\,\delta x' + z'_0\,\delta x - x'_0\,\delta z,\\
k\mathrm{R} &= x\,\delta y' - y\,\delta x' + y'_0\,\delta x - x'_0\,\delta y;
\end{aligned}$$

on a alors

$$\begin{aligned}
\delta(\sqrt{p}\sin i\sin\vartheta) &= \mathrm{P},\\
\delta(\sqrt{p}\sin i\cos\vartheta) &= \mathrm{Q},\\
\delta(\sqrt{p}\cos i) &= \mathrm{R};
\end{aligned}$$

les deux premières de ces équations donneront $\delta(\sqrt{p}\sin i)$ et $\delta\vartheta$ par l'application du procédé rappelé au n° 71; et de même ensuite, on aura δi et $\delta\sqrt{p}$; de cette dernière différence, on déduira aussi

$$\delta p = \delta\sqrt{p}(\sqrt{p} + \sqrt{p_0}).$$

En écrivant maintenant

$$\delta(r \sin g) = \operatorname{cos\acute{e}c} i_0 (\delta z - z \operatorname{cos\acute{e}c} i \, \delta \sin i),$$
$$\delta(r \cos g) = \delta x \cos \vartheta_0 + \delta y \sin \vartheta_0 + x \, \delta \cos \vartheta + y \, \delta \sin \vartheta,$$

et remplaçant $\delta \sin i$, par exemple, par

$$2 \sin \frac{\delta i}{2} \cos \left(i_0 + \frac{\delta i}{2} \right),$$

le même procédé encore donnera les différences δg et δr.

Directement d'ailleurs, on a aussi

$$(r + r_0) \, \delta r = (x + x_0) \, \delta x + (y + y_0) \, \delta y + (z + z_0) \, \delta z,$$

ce qui vérifie le calcul.

La relation

$$r r' = x x' + y y' + z z'$$

donne

$$r \, \delta r' = x \, \delta x' + y \, \delta y' + z \, \delta z' + x'_0 \, \delta x + y'_0 \, \delta y + z'_0 \, \delta z - r'_0 \, \delta r,$$

ce qui permet d'obtenir $\delta r'$; écrivant alors

$$\delta(e \sin v) = \frac{r'_0}{k} \, \delta \sqrt{p} + \frac{\sqrt{p}}{k} \, \delta r',$$
$$\delta(e \cos v) = \frac{1}{r} \left(\delta p - \frac{p_0}{r_0} \, \delta r \right),$$

on a toujours de la même façon δe et δv, d'où

$$\delta \omega = \delta g - \delta v.$$

Il ne reste plus qu'à obtenir directement, en prenant les précautions nécessaires, les valeurs de M, ainsi que celles de a et n, si l'on veut.

L'emploi de la relation

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{k^2}$$

donne aussi directement

$$\frac{\delta a}{a a_0} = \frac{2 \, \delta r}{r r_0} + \frac{(x' + x'_0) \, \delta x' + (y' + y'_0) \, \delta y' + (z' + z'_0) \, \delta z'}{k^2},$$

et l'on peut en déduire δn par l'artifice suivant : on a

$$n = n_0 \left(1 + \frac{\delta a}{a_0}\right)^{-\frac{3}{2}};$$

si donc on fait

$$\frac{\delta a}{a_0} = 2q,$$

et que, comme plus haut, on appelle f la quantité

$$\frac{1}{q}\left[1 - (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}}\right],$$

il vient

$$\delta n = -fq\, n_0;$$

le nombre f est donné en fonction de q par la table d'Encke, ou par le calcul direct que nous avons indiqué.

Bien des modifications de détail peuvent être apportées, ici encore, à ce qui précède : c'est au calculateur lui-même qu'appartient le soin de les établir, suivant les circonstances, et sa propre convenance.

La présente méthode est assez souvent employée : mais comme les perturbations des coordonnées rectangulaires grandissent rapidement et irrégulièrement, il faut en limiter l'usage à d'assez courtes périodes de temps. Elle permet de tenir compte bien facilement des perturbations dans le calcul d'une éphéméride. Si en effet ξ, η, ζ sont, comme d'habitude, les perturbations des coordonnées rectangulaires écliptiques, on en déduit immédiatement celles des coordonnées rectangulaires équatoriales, soit ξ_1, η_1, ζ_1, par les formules

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi, \\ \eta_1 &= \eta \cos\varepsilon - \zeta \sin\varepsilon, \\ \zeta_1 &= \eta \sin\varepsilon + \zeta \cos\varepsilon, \end{aligned}$$

où ε désigne l'obliquité de l'écliptique ; et l'on est ainsi en mesure de calculer simplement l'éphéméride, en partant des coordonnées équatoriales x_1, y_1, z_1, qui correspondent à l'orbite osculatrice de l'époque t_0.

Si l'on peut négliger les termes du second ordre par rapport à ξ, η, ζ, on a directement les perturbations de la distance, de l'ascension droite et de la déclinaison géocentriques, soit ρ, α, δ, par

les formules connues

$$d\rho = \xi_1 \cos\delta \cos\alpha + \eta_1 \cos\delta \sin\alpha + \zeta_1 \cos\delta,$$

$$\rho \cos\delta \, d\alpha = -\xi_1 \sin\alpha + \eta_1 \cos\alpha,$$

$$\rho \, d\delta = -\xi_1 \sin\delta \cos\alpha - \eta_1 \sin\delta \sin\alpha + \zeta_1 \cos\delta.$$

Bien entendu, il faudra prendre les précautions imposées par le choix des différents systèmes de références.

74. Ainsi que nous l'avons déjà dit, on se sert surtout de la méthode de la variation des éléments, de celle dite de « Hansen-Tietjen », et de celle d'Encke développée en dernier lieu; toutefois, on doit éviter la première quand il s'agit d'une orbite cométaire, et limiter l'usage de la dernière à des intervalles de temps assez courts. Mais les règles à suivre sont semblables dans tous les cas; pour les faire bien comprendre, nous allons développer avec tous les détails nécessaires une application numérique, en suivant la quatrième méthode, c'est-à-dire celle du n° 72 : cette méthode, en effet, se prête très bien au calcul, et l'on y définit la position du point M de la façon la plus simple et la plus naturelle par le plan de l'orbite instantanée, le rayon vecteur et la longitude dans l'orbite, que nous substituons ici à l'argument de la latitude.

En nous plaçant dans des conditions fictives, mais analogues à celles que l'on rencontre effectivement quand on tient compte de l'action de Jupiter sur une petite planète, imaginons qu'à l'époque t_0, prise pour origine du temps, l'orbite osculatrice du point M soit définie par les éléments suivants :

$$i_0 = 15°, \qquad \Omega_0 = 75°, \qquad \omega_0 = 135°, \qquad \varphi_0 = 20°, \qquad M_{00} = 90°, \qquad n_0 = 900'';$$

comme d'habitude, le moyen mouvement n_0 est ici rapporté au jour comme unité. La force perturbatrice qui agit sur le point M provient d'un seul astre M_j, dont la masse m_j est 0,001, et qui décrit dans le plan Oxy, suivant les lois du mouvement képlérien, un cercle de centre O, avec un moyen mouvement diurne n_j de 300''; de plus, pour $t = 0$, sa longitude λ_j est nulle.

En prenant l'intervalle de 40 jours pour unité de temps, il faut d'abord remplacer n_0 et n_j par 36000'' ou 10° et 12000'' ou 3°20'; la quantité k devient

$$[\bar{1},83764143],$$

en représentant toujours un nombre par son logarithme entre crochets, et l'expression de k en secondes d'arc est

$$k'' = [5,15206656].$$

Si r_j est le rayon vecteur constant de M_j, déterminé par la relation $n_j^2 r_j^3 = k''^2(1 + m_j)$, on a

$$r_j = [0,71540].$$

Les divers calculs à effectuer sont résumés dans les formules suivantes, où l'on a représenté par des accents les dérivées par rapport au temps :

$$\mu_j = r_j \cos(\lambda_j - \vartheta),$$
$$\nu_j = r_j \cos i \sin(\lambda_j - \vartheta);$$

$$\xi_j = \mu_j \cos g + \nu_j \sin g - r,$$
$$\eta_j = -\mu_j \sin g + \nu_j \cos g,$$
$$\zeta_j = -r_j \sin i \sin(\lambda_j - \vartheta);$$

$$\Delta_j^2 = \xi_j^2 + \eta_j^2 + \zeta_j^2, \qquad Q_j = \frac{1}{\Delta_j^3} - \frac{1}{r_j^3};$$

$$U = k^2 m_j \left(Q_j \xi_j - \frac{r}{r_j^3}\right), \qquad V = \frac{k\, m_j r}{\sqrt{p_0}} Q_j \eta_j, \qquad W = \frac{k''\, m_j r}{(1 + \delta h)\sqrt{p_0}} Q_j \zeta_j;$$

$$(\delta\vartheta)' = \operatorname{coséc} i \sin g\, W, \qquad (\delta i)' = \cos g\, W, \qquad (\delta h)' = V,$$
$$(\delta r)'' = A\,\delta r + B\,\delta h + C, \qquad (\delta f)' = F\,\delta r + G\,\delta h + H;$$

avec

$$f = g + \vartheta,$$
$$A = -\frac{k^2}{r^2 r_0}(1 + 3 e_0 \cos v_0), \qquad B = \frac{2 k^2 p_0}{r^3}\left(1 + \frac{\delta h}{2}\right),$$
$$C = U + \frac{k^2(\delta r)^2}{r^2 r_0^2}\left(1 - \frac{p_0\,\delta r}{r r_0}\right),$$
$$F = -\frac{2G}{r_0}\left(1 + \frac{\delta r}{2 r_0}\right), \qquad G = \frac{k''\sqrt{p_0}}{r^2}, \qquad H = \operatorname{tang}\frac{i}{2} \sin g\, W;$$

les perturbations $\delta\vartheta$, δi, δf sont exprimées en secondes d'arc.

Nous allons donner les résultats principaux du calcul lorsqu'on veut pousser le calcul des perturbations jusqu'à l'époque $t = 10$. Tout d'abord, on déterminera les valeurs de l'anomalie vraie v_0 et du rayon vecteur r_0 pour les époques -2, -1, 0, 1, 2, ..., 10. En y joignant g_0 et $\lambda_j - \vartheta_0$, on a le tableau suivant, avec l'approximation de la seconde d'arc, et de cinq décimales :

t	v_0	$\log r_0$	g_0	$\lambda_j - \vartheta_0$
— 2.....	109°.37′.10″	0,39613	244°.37′.10″	278°.20′
— 1.....	118.32.18	0,42063	253.32.18	281.40
0.....	126.33.38	0,44209	261.33.38	285. 0
1.....	133.52.35	0,46066	268.52.35	288.20
2.....	140.38. 5	0,47652	275.38. 5	291.40
3.....	146.57.11	0,48987	281.57.11	295. 0
4.....	152.55.37	0,50088	287.55.37	298.20
5.....	158.38. 4	0,50969	293.38. 4	301.40
6.....	164. 8.28	0,51643	299. 8.28	305. 0
7.....	169.30.16	0,52118	304.30.16	308.20
8.....	174.46.30	0,52400	309.46.30	311.40
9.....	180. 0. 0	0,52494	315. 0. 0	315. 0
10.....	185.13.30	0,52400	320.13.30	318.20

Pour mettre le calcul en train, en tenant compte de la petitesse des perturbations initiales, déterminons maintenant, pour les époques — 2, — 1, 0, 1, 2, les valeurs de $(\delta\vartheta)'$, $(\delta i)'$, $(\delta h)'$ et celles des coefficients A, B, C, F, G, H, sans tenir compte des perturbations; les valeurs de A, B, F, G pour $t = 0$ étant d'ailleurs inutiles. On a ainsi tout d'abord, en exprimant δh, comme ensuite δr, en unités du cinquième ordre décimal :

t	$(\delta\vartheta)'$	$(\delta i)'$	$(\delta h)'$
—2.........	—17″,28	—2″,12	5,067
—1.........	—26,55	—2,03	6,333
0.........	—37,75	—1,45	7,528
1.........	—50,50	—0,26	8,577
2.........	—64,17	1,64	9,395

Appliquons alors les formules du n° 62, de signification suffisamment claire, et adaptées au cas actuel :

$$z_{\pm 1} = \left(\frac{1}{2}\mu\,\delta y_0 - \frac{1}{24}\mu\,\delta^3 y_0\right) \pm \left(y_0 + \frac{1}{6}\delta^2 y_0 - \frac{1}{180}\delta^4 y_0\right),$$

$$z_{\pm 2} = \left(2\mu\,\delta y_0 + \frac{1}{3}\mu\,\delta^3 y_0\right) \pm \left(2y_0 + \frac{4}{3}\delta^2 y_0 + \frac{7}{45}\delta^4 y_0\right);$$

on en déduit, toujours pour les mêmes époques, les valeurs approchées de $\delta\vartheta$, δi, δh, dont on a besoin pour la suite; pour $\delta\vartheta$ et δi, l'approximation de la seconde suffit, tandis que pour δh il faut une

plus grande précision ; on a ainsi :

t	$\delta\vartheta$	δi	δh
-2	$54''$	$4''$	$-12,64$
-1	32	2	$-6,94$
0	0	0	0
1	-44	-1	$8,07$
2	-101	0	$17,08$

Portons ces valeurs de δh dans l'expression $A\,\delta r + B\,\delta h + C$ de $(\delta r)''$, et négligeons le premier terme δr qui est inconnu, mais de peu d'influence en raison de la petitesse de A ; on a ainsi pour $(\delta r)''$ les valeurs approchées :

t	$(\delta r)''$
-2	$-1,313$
-1	$0,138$
0	$1,553$
1	$2,954$
2	$4,358$

d'où l'on déduit les valeurs approchées de δr

$$(\delta r)_{-2} = 1,219, \qquad (\delta r)_{-1} = 0,541, \qquad (\delta r)_1 = 1,011, \qquad (\delta r)_2 = 4,975,$$

en appliquant cette fois les formules analogues aux précédentes

$$u_{\pm 1} = \left(\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{24}\delta^2 y_0 - \frac{1}{480}\delta^4 y_0\right) \pm \left(\frac{1}{6}\mu\,\delta y_0 - \frac{7}{360}\mu\,\delta^3 y_0\right),$$

$$u_{\pm 2} = \left(2y_0 + \frac{2}{3}\delta^2 y_0 + \frac{1}{30}\delta^4 y_0\right) \pm \left(\frac{4}{3}\mu\,\delta y_0 + \frac{2}{45}\mu\,\delta^3 y_0\right).$$

En tenant compte alors du terme $A\,\delta r$, on a de nouveau

t	$(\delta r)''$	δr
-2	$-1,338$	$1,210$
-1	$0,131$	$0,540$
0	$1,553$	0
1	$2,948$	$1,010$
2	$4,340$	$4,966$

et il est inutile de recommencer.

Enfin, avec les valeurs ci-dessus de δr et δh, on trouve celles

de $(\delta f)'$, ainsi que celles de δf, approchées comme précédemment :

t	$(\delta f)'$	δf
—2	—5″,22	6″
—1	—3,14	2
0	—1,29	0
1	0,14	—1
2	1,05	0

Sans recommencer le calcul, en raison de la petitesse des perturbations, on peut dès maintenant amorcer les tables d'intégration pour les différentes inconnues $\delta\vartheta$, δi, δh, δr, δf, en se servant des formules suivantes pour déterminer les sommes initiales :

$$\Delta^{-1} y_0 = -\frac{1}{2} y_0 + \frac{1}{12} \mu \delta y_0 - \frac{11}{720} \mu \delta^3 y_0 \ldots,$$

$$\Delta^{-2} y_1 = -\frac{1}{12} y_0 + \frac{1}{240} \delta^2 y_0 - \frac{31}{60480} \delta^4 y_0 \ldots$$

Afin que l'on en soit bien assuré, et pour obtenir le maximum d'exactitude, recommençons cependant, en employant pour le calcul de $(\delta\vartheta)'$, $(\delta i)'$, $(\delta h)'$ et des coefficients A, B, C, F, G, H, les valeurs approchées que nous venons d'obtenir pour les perturbations ; avec les valeurs de $(\delta h)'$ déterminons exactement, et toujours de la même façon, celles de δh, et calculons $(\delta r)''$ en nous servant de ces valeurs, ainsi que des valeurs approchées connues de δr, qui sont plus que suffisantes ; en partant des nombres $(\delta r)''$, déterminons exactement les δr, et par suite enfin les $(\delta f)'$: on obtiendra les résultats consignés dans les tables d'intégration ci-dessous, où l'on trouve, sous la dénomination $(\delta\vartheta)^0$, $(\delta i)^0$, $(\delta h)^0$, $(\delta f)^0$, des valeurs grossièrement approchées de $\delta\vartheta$, δi, δh, δf, suffisantes pour calculer, avec l'exactitude nécessaire, les expressions de $(\delta\vartheta)'$, $(\delta i)'$, $(\delta h)'$, A, B, C, F, G, H ; et où l'on trouve encore sous la dénomination δh et δr les valeurs plus exactes de ces quantités, qui permettent le calcul des termes $A\,\delta r$, $B\,\delta h$, $F\,\delta r$, $G\,\delta h$.

Pour continuer les tables d'intégration amorcées comme nous venons de le dire, on détermine d'abord, pour l'époque $t = 3$, les valeurs $(\delta\vartheta)^0$, $(\delta i)^0$, $(\delta h)^0$, $(\delta f)^0$, en usant de la formule d'extrapo-

lation

$$z_{n+1} = \Delta^{-1} y_{n+1} + \frac{1}{3}(y_n + \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \Delta^4 y_{n-4} + \ldots)$$
$$+ \frac{1}{6} y_n + \frac{1}{12} \Delta y_{n-1} + \frac{1}{24} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{11}{720} \Delta^3 y_{n-3} - \frac{1}{288} \Delta^4 y_{n-4} + \ldots,$$

ce qui donne, par un calcul rapide,

$$(\delta\vartheta)^0 = -172'', \qquad (\delta i)^0 = 3'', \qquad (\delta h)^0 = 27, \qquad (\delta f)^0 = 1'',$$

en exprimant toujours δh comme δr en unités de la cinquième décimale.

La formule analogue

$$u_{n+1} = \Delta^{-2} y_{n+2} + \frac{1}{12}(y_n + \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \Delta^4 y_{n-4} + \ldots)$$
$$- \frac{1}{240} \Delta^2 y_{n-2} - \frac{1}{120} \Delta^3 y_{n-3} - \frac{145}{12096} \Delta^4 y_{n-4} + \ldots$$

permet ensuite d'avoir la valeur de δr pour $t = 3$, avec une exactitude presque absolue, sans qu'il soit nécessaire de recourir à aucun autre artifice, soit 13,269.

On a ainsi tous les éléments nécessaires pour calculer les valeurs de $(\delta\vartheta)'$, $(\delta i)'$, $(\delta h)'$, $(\delta r)''$ et $(\delta f)'$, sauf les termes $\mathrm{B}\,\delta h$ et $\mathrm{G}\,\delta h$ qui réclament une valeur plus exacte de δh; celle-ci sera obtenue, une fois que l'on connaîtra $(\delta h)'$, par l'application de la formule

$$z_n = \Delta^{-1} y_{n+1}$$
$$- \frac{1}{2} y_n - \frac{1}{12} \Delta y_{n-1} - \frac{1}{24} \Delta^2 y_{n-2} - \frac{19}{720} \Delta^3 y_{n-3} - \frac{3}{160} \Delta^4 y_{n-4} + \ldots;$$

et si l'on veut s'assurer que la valeur employée pour δr n'a pas besoin de correction, on pourra la retrouver en utilisant la formule analogue

$$u_n = \Delta^{-2} y_{n+1} + \frac{1}{12} y_n - \frac{1}{240} \Delta^2 y_{n-2} - \frac{1}{240} \Delta^3 y_{n-3} - \frac{221}{60480} \Delta^4 y_{n-4} - \ldots.$$

On continuera de la même façon, et l'on formera ainsi les diverses tables d'intégration jusqu'à $t = 10$, par exemple. Les deux dernières formules écrites fourniront alors les valeurs des différentes perturbations, ainsi que la dérivée $(\delta r)'$, pour l'époque $t = 10$ (ou pour toute autre époque comprise dans la table, en se servant des formules d'in-

terpolation convenables), soit

$$\delta\vartheta = -14'29'',74, \qquad \delta i = 2'1'',48, \qquad \delta f = -40'',87,$$
$$\delta h = 0,00072126, \qquad \delta r = 0,00306196, \qquad (\delta r)' = 0,00081891.$$

Déterminons maintenant les nouveaux éléments osculateurs correspondants. On a d'abord

$$\vartheta = 74^\circ 45' 30'',26, \qquad i = 15^\circ 2' 1'',48.$$

On tire des données, en assurant la huitième décimale et le centième de seconde,

$$p_0 = [0,34314768], \qquad a_0 = [0,39717604],$$
$$v_0 = 185^\circ 13' 30'',27,$$

d'où

$$p = [0,34377393]$$

par la relation

$$\sqrt{p} = \sqrt{p_0}(1 + \delta h);$$

et, en n'employant plus que six décimales,

$$r_0 = [0,523998], \qquad r = [0,524396], \qquad \delta p = [\bar{3},502426],$$

ce dernier nombre résultant de la formule

$$\delta p = 2 p_0 \delta h \left(1 + \frac{\delta h}{2}\right).$$

On a ensuite

$$e \sin v - e_0 \sin v_0 = \varepsilon \sin \chi = \delta h . e_0 \sin v_0 + \frac{\sqrt{p}}{k}(\delta r)' = [\bar{3},241928],$$
$$e \cos v - e_0 \cos v_0 = \varepsilon \cos \chi = \frac{\delta p}{r} - \frac{p_0 \delta r}{r r_0} \qquad = [\bar{4},540409];$$

et, par les relations

$$\operatorname{tang}(v - v_0) = \frac{\varepsilon \sin(\chi - v_0)}{e_0 + \varepsilon \cos(\chi - v_0)},$$
$$e - e_0 = \varepsilon \cos\left(\chi - v_0 - \frac{v - v_0}{2}\right) \operatorname{séc} \frac{v - v_0}{2},$$

on obtient

$$v - v_0 = -17' 10'',77, \qquad \frac{e}{e_0} - 1 = [\bar{3},165196],$$

d'où

$$e = [\bar{1},53341591], \qquad \varphi = 19^\circ 58' 10'',19,$$

t	(δ☊)^0	Δ^{-1}	(δ☊)$'$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
−2....	54″		−17″,28				
				−9″,27			
−1....	32		−26,55		−1″,93		
		17″,87		−11,20		0″,38	
0....	0		−37,75		−1,55		0″,26
		−19,88		−12,75		0,64	
1....	−44		−50,50		−0,91		0,22
		−70,38		−13,66		0,86	
2....	−101		−64,16		−0,05		0,23
		−134,54		−13,71		1,09	
3....	−172		−77,87		1,04		0,15
		−212,41		−12,67		1,24	
4....	−257		−90,54		2,28		0,06
		−302,95		−10,39		1,30	
5....	−353		−100,93		3,58		−0,22
		−403,88		−6,81		1,08	
6....	−457		−107,74		4,66		−0,36
		−511,62		−2,15		0,72	
7....	−567		−109,89		5,38		−0,66
		−621,51		3,23		0,06	
8....	−675		−106,66		5,44		−0,78
		−728,17		8,67		−0,72	
9....	−778		−97,99		4,72		
		−826,16		13,39			
10....	−870		−84,60				
		−910,76					

t	$(\delta i)^0$	Δ^{-1}	$(\delta i)'$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
−2........	4″		−2″,12				
				0″,09			
−1........	2		−2,03		0″,49		
		0″,80		0,58		0″,13	
0........	0		−1,45		0,62		−0″,05
		−0,65		1,20		0,08	
1........	−1		−0,25		0,70		−0,05
		−0,90		1,90		0,03	
2........	0		1,65		0,73		−0,06
		0,75		2,63		−0,03	
3........	3		4,28		0,70		−0,12
		5,03		3,33		−0,15	
4........	9		7,61		0,55		−0,13
		12,64		3,88		−0,28	
5........	18		11,49		0,27		−0,10
		24,13		4,15		−0,38	
6........	32		15,64		−0,11		−0,07
		39,77		4,04		−0,45	
7........	49		19,68		−0,56		−0,04
		59,45		3,48		−0,49	
8........	71		23,16		−1,05		0,10
		82,61		2,43		−0,39	
9........	95		25,59		−1,44		
		108,20		0,99			
10........	121		26,58				
		134,78					

t	δh	$(\delta h)^0$	Δ^{-1}	$(\delta h)'$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
—2..	—12,640			5,066				
					1,265			
—1..	— 6,939			6,331		—0,068		
			—3,669		1,197		—0,079	
0..	0			7,528		—0,147		—0,004
			3,859		1,050		—0,083	
1..	8,069			8,578		—0,230		—0,011
			12,437		0,820		—0,094	
2..	17,080			9,398		—0,324		—0,005
			21,835		0,496		—0,099	
3..	26,757	27		9,894		—0,423		0,004
			31,729		0,073		—0,095	
4..	36,727	37		9,967		—0,518		0,011
			41,696		—0,445		—0,084	
5..	46,518	47		9,522		—0,602		0,045
			51,218		—1,047		—0,039	
6..	55,570	56		8,475		—0,641		0,058
			59,693		—1,688		0,019	
7..	63,254	63		6,787		—0,622		0,085
			66,480		—2,310		0,104	
8..	68,935	69		4,477		—0,518		0,097
			70,957		—2,828		0,201	
9..	72,034	72		1,649		—0,317		
			72,606		—3,145			
10..	72,126	72		—1,496				
			71,110					

t	δr	Δ^{-2}	Δ^{-1}	$(\delta r)''$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
—2.	1,209			—1,338				
					1,469			
—1.	0,541			0,131		—0,047		
			—0,659		1,422		0,021	
0.	0	—0,130		1,553		—0,026		0,000
			0,894		1,396		0,021	
1.	1,010	0,764		2,949		—0,005		—0,010
			3,843		1,391		0,011	
2.	4,969	4,607		4,340		0,006		—0,016
			8,183		1,397		—0,005	
3.	13,269	12,790		5,737		0,001		—0,012
			13,920		1,398		—0,017	
4.	27,305	26,710		7,135		—0,016		—0,023
			21,055		1,382		—0,040	
5.	48,474	47,765		8,517		—0,056		—0,018
			29,572		1,326		—0,058	
6.	78,158	77,337		9,843		—0,114		—0,024
			39,415		1,212		—0,082	
7.	117,674	116,752		11,055		—0,196		—0,013
			50,470		1,016		—0,095	
8.	168,229	167,222		12,071		—0,291		—0,013
			62,541		0,725		—0,108	
9.	230,830	229,763		12,796		—0,399		
			75,337		0,326			
10.	306,195	305,100		13,122				
			88,459					

t	$(\delta f)^0$	Δ^{-1}	$(\delta f)'$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
−2.......	6″		−5″,22				
				2″,08			
−1.......	2		−3,14		−0″,23		
		0″,78		1,85		−0″,19	
0.......	0		−1,29		−0,42		0″,09
		−0,51		1,43		−0,10	
1.......	−1		0,14		−0,52		0,02
		−0,37		0,91		−0,08	
2.......	0		1,05		−0,60		0,01
		0,68		0,31		−0,07	
3.......	1		1,36		−0,67		−0,01
		2,04		−0,36		−0,08	
4.......	3		1,00		−0,75		−0,07
		3,04		−1,11		−0,15	
5.......	3		−0,11		−0,90		−0,03
		2,93		−2,01		−0,18	
6.......	2		−2,12		−1,08		−0,07
		0,81		−3,09		−0,25	
7.......	−1		−5,21		−1,33		−0,07
		−4,40		−4,42		−0,32	
8.......	−9		−9,63		−1,65		−0,09
		−14,03		−6,07		−0,41	
9.......	−21		−15,70		−2,06		
		−29,73		−8,13			
10.......	−41		−23,83				
		−53,56					

puis

$$\cos\varphi = [\bar{1},97306990], \qquad a = [0,39763413],$$
$$n = [2,95355537] = 898'',57715,$$

et enfin

$$v = 184^\circ 56' 19'',50, \qquad \omega = f - \vartheta - v = 135^\circ 30' 59'',64,$$

avec

$$\mathrm{M} = 189^\circ 26' 40'',61.$$

En raison du degré d'approximation adopté pour le calcul des perturbations, c'est-à-dire celui de cinq décimales, les résultats précédents peuvent être affectés de très légères erreurs dans les derniers chiffres.

75. Dans le cas particulier que nous venons de traiter, il est possible de trouver une vérification partielle des calculs, en utilisant une relation entre les éléments osculateurs de chaque instant, dite *intégrale de Jacobi*, et bien facile à former comme il suit.

Rappelons d'abord que si l'on a un système d'équations canoniques de la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i},$$

la fonction H dépendant explicitement des variables x_i, y_i et de t, on a la relation

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{dt} \qquad \text{ou} \qquad H = \int \frac{\partial H}{dt}\, dt,$$

puisque

$$\sum \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} \right) = 0,$$

d'après les équations elles-mêmes.

En appliquant ce résultat aux équations (1) du Chapitre III, rappelées au n° 65, et faisant attention que t ne figure explicitement que dans la fonction perturbatrice R, il vient

$$\frac{1}{2}\left(r'^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - \frac{k^2}{r} - R + \int \frac{\partial R}{\partial t}\, dt = 0;$$

en remplaçant $r'^2 + \frac{h^2}{r^2}$, carré de la vitesse de M, par son expression connue $k^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$, a étant le demi-grand axe de l'orbite osculatrice, on a plus simplement

$$(a) \qquad \frac{k^2}{2a} + R - \int \frac{\partial R}{\partial t}\, dt = 0.$$

Ce résultat général prend une forme plus intéressante dans le cas particulier que nous avons traité, c'est-à-dire lorsque la fonction perturbatrice R est due à l'action d'un seul astre M_j décrivant autour du Soleil O comme centre, avec une vitesse angulaire constante n_j, un cercle de rayon r_j, dont le plan est pris pour le plan Oxy. Dans ce cas, en effet, la fonction R ne dépend du temps t que par l'intermédiaire de la longitude λ_j de M_j, et l'on a

$$\int \frac{\partial R}{\partial t}\, dt = n_j \int \frac{\partial R}{\partial \lambda_j}\, dt.$$

Supposons maintenant que l'on définisse la position du point M à l'aide de sa longitude λ, de son rayon vecteur accourci ρ, c'est-à-dire de la projection OM' de OM sur Oxy, et de sa cote z égale à M'M. La fonction R égale à

$$k^2 mj \left(\frac{1}{\Delta_j} - \frac{xx_j + yy_j}{r_j^3} \right),$$

avec

$$\Delta_j^2 = (x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + z^2 = r^2 + r_j^2 - 2(xx_j + yy_j),$$

ne dépend de λ et λ_j que par l'intermédiaire de la quantité $xx_j + yy_j$ égale à $\rho r_j \cos(\lambda - \lambda_j)$, de sorte que l'on a

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda_j} = -\frac{\partial R}{\partial \lambda}.$$

D'autre part, la dérivée partielle $\frac{\partial R}{\partial \lambda}$, égale au quotient par $\delta\lambda$ du travail virtuel de la force perturbatrice F, lorsqu'on fait varier uniquement λ de $\delta\lambda$, suivant les notations habituelles, a pour valeur ρF_σ, en appelant comme précédemment F_σ la projection de F sur la perpendiculaire à OM′ menée dans le plan Oxy; c'est donc encore $\frac{d\eta}{dt}$, c'est-à-dire $\frac{d}{dt}\left(\rho^2 \frac{d\lambda}{dt}\right)$, d'après les équations (2) du n° 65, de sorte que

$$\int \frac{\partial R}{\partial t} dt = -n_j\left(\rho^2 \frac{d\lambda}{dt}\right) + C,$$

en désignant par C une constante.

Observant enfin que $\rho^2 \frac{d\lambda}{dt}$ est la projection $k\sqrt{p}\cos i$ du moment h de la vitesse de M par rapport au point O sur le plan Oxy, la relation générale (a) devient ici

$$\frac{k^2}{2a} + R + n_j k\sqrt{p}\cos i = C,$$

c'est-à-dire en remplaçant R par sa valeur où l'on a exprimé $xx_j + yy_j$ en fonction de Δ_j^2 et r^2, et changeant la signification de la constante C :

$$\frac{1}{2a} + \frac{n_j}{k}\sqrt{p}\cos i + m_j\left(\frac{1}{\Delta_j} + \frac{\Delta_j^2 - r^2}{2r_j^3}\right) = C. \tag{15}$$

Si l'on calcule les valeurs du premier membre de cette équation pour les deux époques $t = 0$ et $t = 10$, dans l'application numérique du numéro précédent, on trouvera, en se contentant d'employer les valeurs de Δ_j à cinq décimales qui ont servi au calcul des perturbations, les deux nombres 0,32192367 et 0,32192365.

76. Le calcul des perturbations des comètes présente quelquefois des particularités qu'il est encore nécessaire de signaler. En premier lieu, il peut arriver qu'une comète se rapproche tellement d'une pla-

nète, et en particulier de Jupiter, que l'action de cette planète doive être regardée comme prépondérante ; en d'autres termes, pendant un certain temps au moins, la comète devient un satellite de la planète.

Pour déterminer les conditions dans lesquelles un tel fait peut se présenter, considérons le système formé par trois points M, S, J, soumis à leurs attractions mutuelles, et dont le premier a une masse négligeable par rapport à celles des deux autres, m_0 et m. Désignons les distances SJ, MS, MJ par d, r_0 r, et appelons θ_0, θ les angles en S, J, dans le triangle MSJ.

Le mouvement relatif du point M, par rapport à des axes de directions fixes et d'origine S, est celui d'un point matériel de masse égale à l'unité sous l'action de trois forces qui sont respectivement : l'attraction de S, soit $\frac{fm_0}{r_0^2}$, dirigée suivant MS ; l'attraction de J, soit $\frac{fm}{r^2}$, dirigée suivant MS ; la force centrifuge, égale à $\frac{fm}{d^2}$, parallèle à la direction JS. Ce mouvement peut donc être considéré comme un mouvement képlérien déterminé par une force principale, égale à la première des forces précédentes, soit F_0, mais troublé par une force perturbatrice F'_0, égale à la résultante des deux dernières de ces forces ; on a d'ailleurs

$$F'_0 = \frac{fm}{r^2 d^2}\sqrt{d^4 + r^4 - 2r^2 d^2 \cos\theta}.$$

De la même façon, le mouvement relatif de M par rapport au point J est un mouvement képlérien déterminé par une force principale F, égale à $\frac{fm}{r^2}$, et troublé par la force

$$F' = \frac{fm_0}{r_0^2 d^2}\sqrt{d^4 + r_0^4 - 2r_0^2 d^2 \cos\theta_0}.$$

Il est clair qu'il faut préférer le second mode de représentation du mouvement de M si le rapport $\frac{F'}{F}$ de la force perturbatrice à la force principale est inférieur au rapport correspondant $\frac{F'_0}{F_0}$ dans le premier mode, c'est-à-dire sous la condition

$$m_0^2 r^4 \sqrt{d^4 + r_0^4 - 2r_0^2 d^2 \cos\theta_0} < m^2 r_0^4 \sqrt{d^4 + r^4 - 2r^2 d^2 \cos\theta};$$

et en écrivant que les deux membres de cette inégalité deviennent égaux, on définit une surface de révolution autour de SJ, qui sépare

les deux régions de l'espace dans lesquelles doit être situé le point M, suivant que c'est l'un ou l'autre des deux modes de représentation qu'il convient d'adopter.

Si le rapport $\mu = \frac{m}{m_0}$ est petit, il doit en être nécessairement de même du rapport $\rho = \frac{r}{d}$; développons alors les deux membres de l'inégalité précédente suivant les puissances de ρ. En écrivant

$$d^4 + r_0^4 - 2r_0^2 d^2 \cos\theta_0 = (d^2 - r_0^2)^2 + \frac{2r_0^2 d^2 \sin^2\theta_0}{1+\cos\theta_0},$$

et remarquant que l'on a

$$r_0^2 = d^2 + r^2 - 2dr\cos\theta,$$

$$r_0 \sin\theta_0 = r\sin\theta, \qquad \cos\theta_0 = \sqrt{1 - \frac{r^2\sin^2\theta}{r_0^2}},$$

on obtient immédiatement

$$\rho^5\sqrt{1+3\cos^2\theta - 4\rho\cos\theta + \ldots} < \mu^2(1 - 4\rho\cos\theta + \ldots),$$

c'est-à-dire

$$\rho < \left(\frac{\mu^2}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}\right)^{\frac{1}{5}}\left(1 - \frac{2}{5}\rho\cos\theta\,\frac{1+6\cos^2\theta}{1+3\cos^2\theta} + \ldots\right).$$

Le facteur $(1+3\cos^2\theta)^{-\frac{1}{10}}$ reste compris entre 1 et 0,87; par suite, si μ est suffisamment petit, on peut dire que c'est le second mode de représentation qu'il faut préférer quand on a $\rho < 0{,}87\,\mu^{\frac{2}{5}}$; et, au contraire, il faut certainement préférer le premier quand on a $\rho > \mu^{\frac{2}{5}}$.

En appliquant ce résultat au problème proposé, et supposant que S soit le Soleil, tandis que J représente Jupiter, les deux limites précédentes sont respectivement 0,054 et 0,062; et en mettant pour d sa valeur moyenne, on voit qu'en résumé une comète doit être regardée comme un satellite de Jupiter toutes les fois que sa distance à cette planète devient inférieure à 0,3.

On aurait des résultats analogues pour les autres planètes. Pour étudier les perturbations produites par l'action du Soleil sur le mouvement jovicentrique d'un satellite de Jupiter dont la masse est supposée négligeable, il suffit de se reporter au Chapitre I pour voir qu'en négligeant des quantités tout à fait insensibles, il n'y a

rien à changer aux équations développées au cours du présent Chapitre, à la condition d'appeler $x, y, z, \ldots, x_j, y_j, z_j, \ldots$ respectivement, les coordonnées jovicentriques du satellite et du Soleil; en outre, il faut prendre comme unité de masse la masse de Jupiter, ce qui revient à remplacer k^2 par $k^2 m'$ et m_j par $\frac{1}{m'}$, en appelant m' la masse de Jupiter rapportée comme d'habitude à celle du Soleil comme unité.

Au moment où une comète pénètre dans la *sphère d'activité* de Jupiter, c'est-à-dire quand on doit cesser l'étude de son mouvement káplérien autour du Soleil troublé par l'action de Jupiter, pour la remplacer par celle de son mouvement káplérien autour de Jupiter troublé par l'action du Soleil, on obtiendra les éléments de ce nouveau mouvement de la façon suivante. Si x, y, z, x_1, y_1, z_1 sont respectivement les coordonnées héliocentriques et jovicentriques de la comète, tandis que x', y', z' sont les coordonnées héliocentriques de Jupiter, on a

$$x_1 = x - x', \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}, \qquad \ldots;$$

comme on connaît $x, \frac{dx}{dt}, \ldots$ par les calculs déjà effectués, et aussi $x', \frac{dx'}{dt}, \ldots$ par les éphémérides, on en déduira $x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ldots$ et par suite, comme nous l'avons déjà rappelé au n° **73**, les éléments du mouvement relatif autour de Jupiter; comme ci-dessus, il faut, dans les formules finies relatives à cette question, remplacer k^2 par $k^2 m'$.

On fera le même calcul en sens inverse, au moment où la comète sort de la sphère d'activité de Jupiter, pour retourner aux éléments du mouvement héliocentrique. Ces éléments pourront être très différents des éléments primitifs qui correspondent à l'entrée dans la sphère d'activité.

Si l'on suppose que, pendant le temps assez court où l'on a regardé la comète comme un satellite de Jupiter, le mouvement héliocentrique de cette planète puisse être assimilé à un mouvement circulaire uniforme, on pourra appliquer au mouvement héliocentrique de la comète l'intégrale de Jacobi obtenue au numéro précédent sous la forme (15) :

$$\frac{1}{2a} + \frac{n_j}{k}\sqrt{p}\cos i + m_j\left(\frac{1}{\Delta_j} + \frac{\Delta_j^2 - r^2}{2r_j^3}\right) = C,$$

en n'oubliant pas que i doit désigner ici l'inclinaison de l'orbite de la comète sur le plan de l'orbite de Jupiter.

Si l'on marque des indices o et 1 respectivement les éléments qui conviennent à l'entrée et à la sortie de la sphère d'activité de Jupiter, en prenant soin de les faire correspondre exactement à une même distance jovicentrique Δ_j, et si l'on néglige la différence toujours très petite des termes $m_j \frac{\Delta_j^2 - r^2}{2 r_j^3}$, on a donc

$$\frac{1}{2a_0} + \frac{n_j}{k}\sqrt{p_0}\cos i_0 = \frac{1}{2a_1} + \frac{n_j}{k}\sqrt{p_1}\cos i_1. \tag{16}$$

Cette formule (16) exprime ce que l'on appelle le *critérium de Tisserand;* son application permet de reconnaître *a priori* si deux comètes d'éléments différents *peuvent* ou ne peuvent pas être en réalité identiques.

77. Supposons maintenant que l'on recherche les perturbations produites dans le mouvement héliocentrique d'une comète par l'action d'une planète M_j, lorsque la comète est très éloignée du Soleil : il est légitime, en raison de la petitesse de ces perturbations, de faire cette recherche séparément pour les diverses planètes, et d'ajouter ensuite simplement les différents résultats obtenus.

La fonction perturbatrice R est de la forme

$$k^2 m' \left(\frac{1}{\Delta_j} - \frac{x x_j + y y_j + z z_j}{r_j^3}\right),$$

et l'on voit que, dans le cas actuel, c'est le second terme de cette expression qui acquiert une influence prépondérante; ce terme correspond à la force centrifuge dans le mouvement relatif de la comète par rapport au Soleil, et les inégalités qui en résultent sont de même nature que le mouvement de M_j par rapport au Soleil; si le calcul des perturbations doit s'étendre à une longue période de temps, ces inégalités ont un caractère périodique; leur effet général est faible, mais leur présence altère la régularité des perturbations et exige un assez grand rapprochement des époques successives pour lesquelles on doit déterminer ces perturbations.

On peut éviter cet inconvénient en rapportant le mouvement de la comète non plus au Soleil même, mais au centre de gravité du sys-

tème formé par le Soleil et la planète. De cette façon, en effet, la force centrifuge n'existe plus, d'après les propriétés bien connues du mouvement du centre de gravité ; la fonction de forces qui détermine le nouveau mouvement se réduit simplement à $\frac{k^2}{r}+\frac{k^2 m_j}{\Delta_j}$, les notations ayant toujours le même sens. C'est aussi ce qui résulte des considérations développées à la fin du Chapitre I, la masse de M étant négligeable.

Soit alors G le centre de gravité des masses O et M_j; et, par rapport aux axes parallèles à $Oxyz$ menés par le point G, soient ξ, η, ζ, ξ_j, η_j, ζ_j les coordonnées de M et M_j; soit de plus ρ la distance GM. On a

$$\xi_j=\frac{x_j}{1+m_j}, \qquad \ldots, \qquad x=\xi+m_j\xi_j, \qquad \ldots;$$

par suite

$$\Delta_j^2=(\xi-\xi_j)^2+(\eta-\eta_j)^2+(\zeta-\zeta_j)^2,$$

et, en négligeant le carré de m_j,

$$r^2=\rho^2+2m_j(\xi\xi_j+\eta\eta_j+\zeta\zeta_j)+\ldots,$$

d'où

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\rho}-\frac{m_j}{\rho^3}(\xi\xi_j+\eta\eta_j+\zeta\zeta_j)+\ldots.$$

On peut alors regarder le mouvement de M par rapport au point G comme un mouvement képlérien déterminé par la fonction de forces

$$\frac{k^2(1+m_j)}{\rho},$$

à laquelle il faut adjoindre la fonction perturbatrice

$$F=k^2 m_j\left(\frac{1}{\Delta_j}-\frac{1}{\rho}-\frac{\xi\xi_j+\eta\eta_j+\zeta\zeta_j}{\rho^3}\ldots\right);$$

cette fonction est évidemment très petite quand la comète est très éloignée du Soleil, puisque alors les quantités ρ et Δ_j sont très grandes et assez voisines ; quant aux termes non écrits, ils sont au moins du second ordre par rapport à m_j.

Les projections de la force perturbatrice sur les axes de coordonnées sont obtenues en différentiant la fonction précédente par rap-

port à ξ, η, ζ, ce qui donne

$$F_x = k^2 m_j \left[(\xi_j - \xi)\left(\frac{1}{\Delta_j^3} - \frac{1}{\rho^3}\right) + \frac{3\xi}{\rho^5}(\xi\xi_j + \eta\eta_j + \zeta\zeta_j) + \ldots \right], \quad \ldots;$$

et si ξ'_j, η'_j, ζ'_j sont les coordonnées de M_j par rapport aux axes formés par le rayon vecteur GM, la perpendiculaire à GM menée dans le plan de l'orbite instantanée de M autour de G, et la normale à ce plan, on a plus simplement, pour les projections de la force perturbatrice suivant ces trois axes

$$F_r = k^2 m_j \left[(\xi'_j - \rho)\left(\frac{1}{\Delta_j^3} - \frac{1}{\rho^3}\right) + \frac{3\xi'_j}{\rho^3} + \ldots \right],$$

$$F_p = k^2 m_j \eta'_j \left(\frac{1}{\Delta_j^3} - \frac{1}{\rho^3}\right) + \ldots, \qquad F_n = k^2 m_j \zeta'_j \left(\frac{1}{\Delta_j^3} - \frac{1}{\rho^3}\right) \quad \ldots$$

Quand on voudra faire usage de cette méthode, il faudra savoir passer à un certain moment des éléments du mouvement de M par rapport à O aux éléments correspondants du mouvement par rapport à G, et inversement. Comme on a les relations

$$x = \xi + \frac{m_j}{1 + m_j} x_j, \quad \ldots, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \frac{m_j}{1 + m_j}\frac{dx_j}{dt}, \quad \ldots$$

on voit que l'on est encore ramené au même problème que dans le numéro précédent. Mais comme les différences $x - \xi$, ... sont très petites, de l'ordre de m_j, on appliquera les formules développées à la fin du n° 73, qui donnent les différences de certaines fonctions des éléments, et plus simplement encore les formules différentielles proprement dites qui en résultent. Toutefois, il faudra faire attention que dans le passage d'un mouvement à l'autre, la quantité k^2 est remplacée par $k^2(1 + m_j)$, et par suite, il faudra avoir soin de faire varier aussi k dans ces formules. Il suffit d'avoir attiré l'attention sur ce point, sans qu'il soit nécessaire de développer effectivement les nouvelles formules qui en résultent.

LIVRE III.

THÉORIE DES PLANÈTES.

CHAPITRE XII.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES RELATIFS AU MOUVEMENT KÉPLÉRIEN ELLIPTIQUE.

78. Avant d'aborder l'étude analytique du mouvement des planètes, il est tout d'abord nécessaire de porter notre attention sur la résolution de certains problèmes relatifs au mouvement káplérien *elliptique*, à l'aide de développements en séries. Nous reprendrons ici les notations du Chapitre III, de sorte que, dans l'ellipse de demi-grand axe a et d'excentricité ε, le rayon vecteur et les trois anomalies vraie, excentrique et moyenne seront respectivement r, w, u, g; les coordonnées rectangulaires correspondant aux coordonnées polaires r, w, seront aussi X, Y. Toutes ces quantités sont réelles; de plus, a, r, ε sont positives, et cette dernière est inférieure à l'unité.

Nous avons rencontré précédemment déjà des formules permettant de développer en série les coordonnées X, Y et toutes les fonctions analogues suivant les puissances entières et positives de $g - g_0$, en désignant par g_0 une valeur particulière de g; et nous avons déterminé au n° 31 les conditions de convergence de ces développements, en étudiant les singularités de la fonction u de g définie par l'équation de Képler

$$u - \varepsilon \sin u = g.$$

Mais c'est une autre sorte de développements que nous devons maintenant envisager. Le mouvement est périodique, et les coordonnées du point mobile reprennent les mêmes valeurs lorsque les

angles g, u, w augmentent de 2π. Une fonction réelle de ces coordonnées, dépourvue de singularités dans le domaine réel à distance finie, ainsi que nous le supposerons toujours, est donc développable en série de Fourier, toujours convergente, procédant suivant les cosinus et sinus des multiples de l'un ou l'autre des angles g, u, w. L'importance de ces développements est manifeste, et ce sont eux qu'il faut tout d'abord étudier.

Nous ferons dans ce qui suit

$$x = e^{ig}, \qquad y = e^{iu}, \qquad z = e^{iw},$$

e désignant comme d'habitude la base des logarithmes hyperboliques, dont la caractéristique sera log, et i l'imaginaire $\sqrt{-1}$.

Un développement de Fourier par rapport à g, par exemple, peut s'écrire d'une façon plus avantageuse sous la forme d'une série de Laurent

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n,$$

n prenant toutes les valeurs entières, positives ou non.

La fonction f étant supposée généralement de la forme $f_1 + i f_2$, f_1 et f_2 étant réelles, mettons en évidence la partie réelle et la partie imaginaire du coefficient a_n en écrivant

$$a_n = \alpha_n + i\beta_n;$$

on aura, sous forme réelle,

$$f_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_n \cos ng - \beta_n \sin ng), \qquad f_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} (\beta_n \cos ng + \alpha_n \sin ng).$$

On aura une forme équivalente, que nous appellerons *symétrique*, en écrivant

$$f_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\alpha_n + \alpha_{-n}}{2} \cos ng - \frac{\beta_n - \beta_{-n}}{2} \sin ng \right),$$

$$f_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\beta_n + \beta_{-n}}{2} \cos ng + \frac{\alpha_n - \alpha_{-n}}{2} \sin ng \right),$$

de façon que les coefficients de $\cos ng$ et $\cos(-ng)$ soient égaux,

tandis que ceux de $\sin ng$ et $\sin(-ng)$ sont égaux et de signes contraires. Cette manière d'écrire revient d'ailleurs à la suivante, plus habituelle,

$$f_1 = \alpha_0 + \sum_1^\infty (\alpha_n + \alpha_{-n}) \cos ng - \sum_1^\infty (\beta_n - \beta_{-n}) \sin ng,$$

$$f_2 = \beta_0 + \sum_1^\infty (\beta_n + \beta_{-n}) \cos ng + \sum_1^\infty (\alpha_n - \alpha_{-n}) \sin ng.$$

Quand f_2 n'existe pas, les coefficients a_n et a_{-n} sont conjugués, de sorte que $\alpha_{-n} = \alpha_n$, $\beta_{-n} = -\beta_n$; si c'est f_1 qui n'existe pas, on a de même $\alpha_{-n} = -\alpha_n$, $\beta_{-n} = \beta_n$. Dans les cas les plus fréquents, la fonction f_1 est paire et f_2 est impaire par rapport à g : les coefficients a_n sont alors réels, de sorte que $a_n = \alpha_n$, $\beta_n = 0$.

79. Cherchons les relations qui existent entre les variables x, y, z; nous nous servirons ici de quelques notations auxiliaires, en posant

$$\varepsilon = \sin\varphi, \qquad \eta = \cos\varphi, \qquad \theta = \tang\frac{\varphi}{2}, \qquad \omega = \cos^2\frac{\varphi}{2}, \qquad \omega' = \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\varphi},$$

l'angle φ étant positif aigu; il est inutile de détailler les nombreuses formules simples qui relient entre elles ces diverses quantités; remarquons seulement que $\frac{\varepsilon}{2\theta}$, η, ω, ω' sont développables en séries entières ordonnées suivant les puissances paires de ε ou de θ, se réduisant à l'unité pour $\varphi = 0$.

Pour exprimer d'abord z en fonction de y, partons des formules connues

$$\sqrt{\frac{r}{a}} \cos\frac{w}{2} = \sqrt{1-\varepsilon} \cos\frac{u}{2}, \qquad \sqrt{\frac{r}{a}} \sin\frac{w}{2} = \sqrt{1+\varepsilon} \sin\frac{u}{2};$$

elles donnent immédiatement

$$\sqrt{\frac{r}{a}} e^{\frac{iw}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2} e^{\frac{iu}{2}} - \sin\frac{\varphi}{2} e^{-\frac{iu}{2}},$$

$$\sqrt{\frac{r}{a}} e^{-\frac{iw}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2} e^{-\frac{iu}{2}} - \sin\frac{\varphi}{2} e^{\frac{iu}{2}},$$

et, par suite,

$$z = y\,\frac{1-\theta y^{-1}}{1-\theta y},$$

en même temps que

$$\frac{r}{a} = \omega(1-\theta y)(1-\theta y^{-1}) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}(y+y^{-1}).$$

Elles donnent aussi

$$\eta\sqrt{\frac{a}{r}}\,e^{\frac{iu}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2}\,e^{\frac{iw}{2}} + \sin\frac{\varphi}{2}\,e^{-\frac{iw}{2}},$$

$$\eta\sqrt{\frac{a}{r}}\,e^{-\frac{iu}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2}\,e^{-\frac{iw}{2}} + \sin\frac{\varphi}{2}\,e^{\frac{iw}{2}},$$

de sorte que

$$y = z\,\frac{1+\theta z^{-1}}{1+\theta z},$$

avec

$$\frac{a}{r} = \omega'(1+\theta z)(1+\theta z^{-1}) = \frac{1}{\eta^2}\left[1+\frac{\varepsilon}{2}(z+z^{-1})\right]$$

Remarquons encore que l'on a

$$(1+\theta z)(1-\theta y) = (1+\theta z^{-1})(1-\theta y^{-1}) = \frac{\eta}{\omega},$$

$$\frac{y\,dz}{z\,dy} = \eta\,\frac{a}{r}.$$

Les fonctions z et z^{-1} de y admettent respectivement les valeurs $y = \frac{1}{\theta}$, $y = \theta$ comme pôles simples, sans autres points singuliers; de même, les fonctions y et y^{-1} de z admettent les points $z = -\frac{1}{\theta}$, $z = -\theta$, respectivement, comme pôles simples, sans autres singularités.

Les variables y et z s'exprimant explicitement l'une en fonction de l'autre, il est aisé de faire directement leur échange dans un développement procédant suivant les puissances de l'une d'elles. Mais on peut suivre aussi une méthode indirecte, qui prendra toute sa valeur quand nous nous occuperons des développements suivant les puissances de x.

La fonction quelconque f étant développable, sous les conditions indiquées plus haut, en série de Laurent de la forme

$$f = \sum b_n y^n = \sum c_n z^n,$$

où il est entendu désormais que la sommation Σ est étendue à toutes

les valeurs entières, positives ou non, de n, on a par exemple, comme l'on sait,

$$2i\pi c_n = \int_C \frac{f\,dz}{z^{n+1}},$$

l'intégrale étant prise suivant le cercle de rayon égal à l'unité, tracé de l'origine comme centre, dans le plan qui sert à représenter les valeurs de la variable complexe z, ou suivant tout chemin équivalent. En substituant y à z, on a donc aussi

$$2i\pi c_n = \int_B f \frac{y\,dz}{z\,dy} \left(\frac{y}{z}\right)^n \frac{dy}{y^{n+1}},$$

le nouveau chemin B, relatif à la variable y, étant analogue à C; par suite, on peut dire que le coefficient c_n de z^n dans le développement de f suivant les puissances de z est égal au coefficient de y^n dans le développement suivant les puissances de y de la nouvelle fonction

$$\eta \frac{a}{r} \left(\frac{y}{z}\right)^n f \quad \text{ou} \quad \frac{\eta}{\omega}(1-\theta y)^{n-1}(1-\theta y^{-1})^{-n-1} f.$$

Pour compléter ce théorème, convenons tout d'abord de désigner par $D_z f$ la dérivée $\frac{df}{d(\log z)}$, soit encore $\frac{1}{i}\frac{df}{dw}$, et observons que

$$D_z f = z\frac{df}{dz} = \sum n c_n z^n;$$

nous emploierons de la même façon les notations analogues $D_y f$, $D_x f$. Si alors on remplace dans la proposition précédente la fonction f par $D_z f$, on voit immédiatement que le coefficient c_n de z^n dans le développement de f suivant les puissances de z est égal au coefficient de y^n dans le développement suivant les puissances de y de la nouvelle fonction

$$\frac{1}{n}\left(\frac{y}{z}\right)^n D_y f \quad \text{ou} \quad \frac{1}{n}(1-\theta y)^n (1-\theta y^{-1})^{-n} D_y f;$$

toutefois, ceci suppose l'indice n non nul.

En échangeant le rôle de y et de z, on voit de même que le coefficient b_n de y^n dans le développement de f suivant les puissances de y est égal au coefficient de z^n dans le développement suivant les

puissances de z de la fonction

$$\frac{1}{\eta}\frac{r}{a}\left(\frac{z}{y}\right)^n f = \frac{\eta}{\omega}(1+\theta z)^{n-1}(1+\theta z^{-1})^{-n-1} f,$$

ou encore, en excluant le cas de $n=0$, de la fonction

$$\frac{1}{n}\left(\frac{z}{y}\right)^n D_z f = \frac{1}{n}(1+\theta z)^n(1+\theta z^{-1})^{-n} D_z f.$$

Introduisons maintenant la variable x. L'équation de Képler, écrite sous la forme

$$ig = iu - \frac{\varepsilon}{2}(y - y^{-1}),$$

donne immédiatement la relation qui définit x en fonction de y, soit

$$x = y\, e^{\frac{\varepsilon}{2}(y^{-1}-y)};$$

mais on ne peut en tirer y explicitement en fonction de x. En mettant z au lieu de y dans la formule précédente, on a, moins simplement encore,

$$x = z\frac{1+\theta z^{-1}}{1+\theta z}\, e^{\eta\left(\frac{\theta z^{-1}}{1+\theta z^{-1}} - \frac{\theta z}{1+\theta z}\right)}.$$

On a aussi

$$\frac{x\,dy}{y\,dx} = \frac{a}{r}, \qquad \frac{x\,dz}{z\,dx} = \eta\frac{a^2}{r^2},$$

formules équivalentes d'ailleurs aux relations bien connues

$$\frac{du}{dg} = \frac{a}{r}, \qquad \frac{dw}{dg} = \eta\frac{a^2}{r^2}.$$

La fonction x ou x^{-1} de y admet les valeurs $y=0$, $y=\infty$ comme points singuliers essentiels; et de même, considérée comme fonction de z, elle admet les deux points singuliers essentiels $z=-\theta$, $z=-\frac{1}{\theta}$.

Regardons maintenant y (ou y^{-1}) comme fonction de x, et cherchons-en les points singuliers en dehors des points $x=0$, $x=\infty$, dont il est inutile de nous occuper. Il suffit d'égaler à zéro la dérivée $\frac{dx}{dy}$, ce qui conduit aux valeurs

$$y_1 = \frac{1}{\theta}, \qquad y_2 = \theta,$$

auxquelles correspondent

$$x_1 = \frac{1}{\theta} e^{-\eta}, \qquad x_2 = \theta\, e^{\eta};$$

tels sont les points singuliers cherchés.

Les nombres x_1 et x_2 sont positifs, comme y_1 et y_2, et il est facile de vérifier que l'on a

$$x_2 < 1 < x_1;$$

en effet, d'une part, le produit $x_1 x_2$ est égal à l'unité, et, d'autre part, la fonction θe^{η} croît constamment depuis zéro jusqu'à 1, lorsque l'angle φ augmente de zéro à $\frac{\pi}{2}$, comme le montre le signe de sa dérivée.

Examinons de plus près la nature de ces points singuliers. Sous la condition $\frac{dx}{dy} = 0$, on trouve facilement

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{\varepsilon x}{2 y^2}(y^{-1} - y),$$

et, par suite, dans les domaines des points y_1, y_2, on peut écrire les développements réguliers

$$x = x_1 - \frac{\eta\theta}{2} e^{-\eta}(y - y_1)^2 + \ldots, \qquad x = x_2 + \frac{\eta}{2\theta} e^{\eta}(y - y_2)^2 + \ldots;$$

inversement donc, $y - y_1$, $y - y_2$ sont développables respectivement suivant les puissances positives entières de $(x - x_1)^{\frac{1}{2}}$, $(x - x_2)^{\frac{1}{2}}$, ou bien $\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(1 - \frac{x_2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$, et l'on a, pour la fonction y, dans le domaine des points singuliers,

$$y - y_1 = -\frac{1}{\theta}\sqrt{\frac{2}{\eta}}\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \ldots, \qquad y - y_2 = \theta\sqrt{\frac{2}{\eta}}\left(1 - \frac{x_2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \ldots.$$

Les signes ont été choisis de façon que, les radicaux $\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(1 - \frac{x_2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ recevant, sous la condition $|x| < x_1$ ou $|x| > x_2$, les déterminations qui se réduisent à l'unité pour $x = 0$, ou $x = \infty$, la branche de la fonction y ainsi représentée soit celle qui devient égale à 1 pour $x = 1$, c'est-à-dire celle qui nous intéresse : et en effet, la

relation qui lie x à y, montre immédiatement que, si x augmente par valeurs réelles depuis x_2 jusqu'à x_1, cette détermination spéciale de la fonction y augmente de même par valeurs réelles depuis y_2 jusqu'à y_1, de sorte que l'on a $y - y_1 < 0$, $y - y_2 > 0$.

Si maintenant nous observons que

$$z = \frac{1}{\theta}\,\frac{y - y_2}{y_1 - y},$$

nous voyons que la fonction z de x admet les deux mêmes points singuliers x_1 et x_2, avec les valeurs correspondantes $z_1 = \infty$, $z_2 = 0$. Dans le domaine de ces points singuliers, on a

$$z^{-1}\,\frac{\varepsilon}{\eta}\sqrt{\frac{1}{2\eta}}\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \ldots, \qquad z = \frac{\varepsilon}{\eta}\sqrt{\frac{1}{2\eta}}\left(1 - \frac{x_2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

les développements ayant toujours lieu suivant les puissances de $\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(1 - \frac{x_2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Puisque l'on ne peut exprimer ni y, ni z, en fonction explicite de x, il est nécessaire d'avoir recours à la méthode indirecte exposée ci-dessus pour obtenir, sous la forme

$$f = \sum a_n x^n,$$

le développement suivant les puissances de x, de la fonction quelconque f dont on suppose connue l'expression à l'aide de y ou de z.

L'application de cette méthode est immédiate et conduit aux résultats suivants :

1° Le coefficient a_n de x^n dans le développement de f suivant les puissances de x est égal au coefficient de y^n dans le développement suivant les puissances de y de la fonction

$$\frac{r}{a}\,e^{\frac{n\varepsilon}{2}(y - y^{-1})} f,$$

ou encore, en excluant le cas de $n = 0$, de la fonction

$$\frac{1}{n}\,e^{\frac{n\varepsilon}{2}(y - y^{-1})}\,\mathrm{D}_y f.$$

2° Le coefficient a_n est égal au coefficient de z^n dans le développement suivant les puissances de z de la fonction

$$\frac{1}{\eta}\frac{r^2}{a^2}\left(\frac{z}{x}\right)^n f = \frac{\eta^3}{\omega^2}(1+\theta z)^{n-2}(1+\theta z^{-1})^{-n-2}\, e^{n\eta\left(\frac{\theta z}{1+\theta z}-\frac{\theta z^{-1}}{1+\theta z^{-1}}\right)} f,$$

ou encore, en excluant le cas de $n=0$, de la fonction

$$\frac{1}{n}(1+\theta z)^n(1+\theta z^{-1})^{-n}\, e^{n\eta\left(\frac{\theta z}{1+\theta z}-\frac{\theta z^{-1}}{1+\theta z^{-1}}\right)} D_z f.$$

Quant à la substitution inverse de la variable y ou z à x, dans le développement de f, elle ne peut se faire que directement.

80. Les principes que nous venons d'exposer permettent de transformer les uns dans les autres les coefficients a_n, b_n, c_n des divers développements d'une même fonction f suivant les puissances de x, y, z. Quand il s'agit d'une transformation numérique, le problème de beaucoup le plus important est celui du calcul des a_n connaissant les b_n, et c'est le seul dont nous allons donner la solution avec tous les détails nécessaires, mais en évitant tout ce qui serait inutile pour notre objet.

On est amené à considérer la fonction

$$\varphi(y) = e^{\frac{t}{2}(y-y^{-1})},$$

et à la développer, ainsi qu'il est possible, suivant les puissances entières, positives ou non, de y, sous la forme

$$\varphi(y) = \sum y^n J_n(t).$$

Puisqu'en effet a_n est le coefficient de y^n dans le développement suivant les puissances de y de la fonction

$$\frac{1}{n} e^{\frac{n\varepsilon}{2}(y-y^{-1})} D_y f,$$

et que l'on a

$$D_y f = \sum n' b_{n'} y^{n'}, \qquad e^{\frac{n\varepsilon}{2}(y-y^{-1})} = \sum y^{n''} J_{n''}(n\varepsilon),$$

il en résulte immédiatement

$$a_n = \sum \frac{n'}{n} b_{n'} J_{n''}(n\varepsilon),$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs positives ou non de n' et n'', dont la somme est égale à n.

Toutefois ce résultat suppose n non nul. Pour obtenir a_0, on remarquera que c'est aussi le terme constant du développement de $\frac{r}{a}f$ suivant les puissances de y, et comme

$$\frac{r}{a} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}(y + y^{-1}),$$

il vient

$$a_0 = b_0 - \frac{\varepsilon}{2}(b_1 + b_{-1}).$$

Étudions de plus près les fonctions $J_n(t)$ de la variable réelle t, connues sous le nom de *fonctions de Bessel*.

La fonction $\varphi(y)$ reste la même quand on change y en $-\frac{1}{y}$, ou bien t en $-t$, y en $-y$, ou bien encore t en $-t$, y en $\frac{1}{y}$; on a donc

$$J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t), \qquad J_n(-t) = (-1)^n J_n(t), \qquad J_{-n}(-t) = J_n(t),$$

et, par suite, nous pouvons nous borner dans ce qui suit à supposer les quantités n et t positives ou nulles; d'ailleurs on a $J_0(0) = 1$, et $J_n(0) = 0$ pour $n \neq 0$.

En écrivant

$$\varphi(y) = e^{\frac{t}{2}y} \times e^{-\frac{t}{2y}},$$

et développant les exponentielles en séries, on a immédiatement

$$(a) \qquad J_n(t) = \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^n}{1.2\ldots n}\left[1 - \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2}{1.(n+1)} + \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^4}{1.2.(n+1)(n+2)} - \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^6}{1.2.3.(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\right];$$

le premier facteur étant l'unité pour $n = 0$.

Cette série est toujours convergente, et si le nombre n est égal ou supérieur à la partie entière de $\frac{t^2}{4}$, on peut affirmer que l'on a

$$(b) \qquad 0 < J_n(t) < \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^n}{1.2\ldots n},$$

le dernier membre de cette inégalité étant une valeur d'autant plus approchée de $J_n(t)$ que n sera plus grand.

On a

$$D_y \varphi(y) = \frac{t}{2}(y + y^{-1})\varphi(y),$$

et aussi, en différentiant par rapport à t,

$$\frac{\partial \varphi(y)}{\partial t} = \frac{1}{2}(y - y^{-1})\varphi(y).$$

Remplaçant dans ces égalités $\varphi(y)$ par son développement, et désignant par $J'_n(t)$ la dérivée de $J_n(t)$ par rapport à t, il vient

$$(c) \qquad J_{n-1}(t) + J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t),$$

et

$$(c') \qquad J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t) = 2 J'_n(t).$$

On peut donc exprimer $J_{n-1}(t)$, $J_{n+1}(t)$ en fonction linéaire et homogène de $J_n(t)$ et $J'_n(t)$; et l'application répétée de la formule (c), où l'on change n en $n \mp 1$, $n \mp 2$, ..., montre qu'il en est de même de J_{n-2}, J_{n+2}, J_{n-3}, J_{n+3}, ...

Si l'on fait

$$J_n(t) = k_n J_{n-1}(t),$$

la relation (c) peut encore s'écrire sous la forme

$$(d) \qquad \frac{1}{k_n} = \frac{2n}{t} - k_{n+1}.$$

Comme le rapport k_{n+p} est sensiblement égal à $\frac{t}{2(n+p)}$, d'après la formule (b), et par suite très petit pour p très grand, on voit que les nombres k_n, k_{n+1}, k_{n+2}, ... sont tous positifs et inférieurs à l'unité dès que l'on a $n \geqq t$; en d'autres termes, sous le bénéfice de cette condition, les nombres $J_{n-1}(t)$, $J_n(t)$, $J_{n+1}(t)$, ... sont positifs et décroissants.

En faisant $y = e^{i\omega}$, on a $\varphi(y) = e^{it\sin\omega}$, et par suite

$$\cos(t\sin\omega) + i\sin(t\sin\omega) = \sum J_n(t)(\cos n\omega + i\sin n\omega),$$

c'est-à-dire

$$(e)\quad \begin{cases} \cos(t\sin\omega) = \quad J_0(t) \qquad + 2\,J_2(t)\cos 2\omega + 2\,J_4(t)\cos 4\omega + \ldots, \\ \sin(t\sin\omega) = 2\,J_1(t)\sin\omega + 2\,J_3(t)\sin 3\omega + 2\,J_5(t)\sin 5\omega + \ldots. \end{cases}$$

D'après les expressions connues des coefficients d'une série de Fourier sous forme d'intégrales définies, on voit ainsi que les nombres $J_n(t)$ sont tous inférieurs à l'unité en valeur absolue

Appliquons aux formules (e) ce que nous avons dit au n° 56 à propos de l'interpolation périodique, de la façon suivante : en désignant par q un nombre entier positif, et prenant $k = 0, 1, 2, \ldots, q$, faisons

$$\alpha_k = \cos\left(t\sin\frac{k\pi}{2q}\right), \qquad \beta_k = \sin\left(t\sin\frac{k\pi}{2q}\right),$$

en ayant soin toutefois de multiplier les seconds membres par le facteur $\frac{1}{2}$ quand on a $k = 0$ ou $k = q$, de sorte que

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}, \qquad \beta_0 = 0, \qquad \alpha_q = \frac{1}{2}\cos t, \qquad \beta_q = \frac{1}{2}\sin t.$$

Il vient alors, en écrivant simplement J_n pour $J_n(t)$,

$$(f)\quad \begin{cases} J_0 \quad = \dfrac{1}{q}\sum \alpha_k - 2\,J_{4q} - 2\,J_{8q} - \ldots, \\ J_2 \quad = \dfrac{1}{q}\sum \alpha_k \cos\dfrac{k\pi}{q} - J_{4q-2} - J_{4q+2} - J_{8q-2} - J_{8q+2} - \ldots, \\ J_4 \quad = \dfrac{1}{q}\sum \alpha_k \cos\dfrac{2k\pi}{q} - J_{4q-4} - J_{4q+4} - J_{8q-4} - J_{8q+4} - \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ J_{2q-2} = \dfrac{1}{q}\sum \alpha_k \cos\dfrac{(q-1)k\pi}{q} - J_{2q+2} - J_{6q-2} - J_{6q+2} - J_{10q-2} - \ldots, \\ J_{2q} \quad = \dfrac{1}{2q}\sum (-1)^k \alpha_k - J_{6q} - J_{10q} - \ldots; \end{cases}$$

et aussi

$$(f')\quad \begin{cases} J_1 \quad = \dfrac{1}{q}\sum \beta_k \sin\dfrac{k\pi}{2q} + J_{4q-1} - J_{4q+1} + J_{8q-1} - J_{8q+1} + \ldots, \\ J_3 \quad = \dfrac{1}{q}\sum \beta_k \sin\dfrac{3k\pi}{2q} + J_{4q-3} - J_{4q+3} + J_{8q-3} - J_{8q+3} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ J_{2q-1} = \dfrac{1}{q}\sum \beta_k \sin\dfrac{(2q-1)k\pi}{2q} + J_{2q+1} - J_{6q-1} + J_{6q+1} - J_{10q-1} + \ldots. \end{cases}$$

Cherchons enfin une valeur approchée de la fonction $J_{n-p}(t)$, lorsqu'on suppose l'indice n très grand, tandis que l'entier positif ou négatif p est petit par rapport à n; de plus nous supposerons que l'on a $t = n\varepsilon$, ε désignant un nombre inférieur à l'unité. En revenant aux notations du numéro précédent, on voit immédiatement, d'après les règles énoncées pour le développement d'une fonction de y suivant les puissances de x, que le nombre considéré $J_{n-p}(t)$ n'est autre chose que le coefficient de x^n dans le développement de la fonction $f = \frac{n}{p} y^p$. Or, d'après l'étude des points singuliers de la fonction y de x, f est développable en série de Laurent, dans la couronne circulaire comprise entre les deux cercles de rayons x_1 et x_2 décrits de l'origine comme centre dans le plan qui sert à représenter la variable complexe x; le seul point singulier situé sur le cercle extérieur de convergence est x_1, et dans le domaine de ce point, on a

$$f = \frac{n}{p}\left[y_1^p - \frac{p y_1^{p-1}}{\theta}\sqrt{\frac{2}{\eta}}\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \ldots\right].$$

Donc, d'après le n° 55, la valeur asymptotique de $J_{n-p}(n\varepsilon)$ est égale à

$$-n\frac{y_1^{p-1}}{\theta x_1^n}\sqrt{\frac{2}{\eta}}\,\frac{n^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)},$$

c'est-à-dire que l'on a

$$(g) \qquad J_{n-p}(n\varepsilon) = \frac{(\theta e^{\eta})^n}{\theta^p\sqrt{2n\pi\eta}}(1+\alpha),$$

α tendant vers zéro quand n augmente indéfiniment. Cette formule est évidemment valable aussi pour $p = 0$, bien que la démonstration ne s'applique pas à ce cas : on peut s'en convaincre directement sans difficulté. Il est aisé de voir aussi que ce résultat ne diffère pas de celui que donne la formule (b), lorsque ε est suffisamment petit.

On arrive facilement au même résultat en observant encore que $J_{n-p}(n\varepsilon)$, coefficient de y^{n-p} dans le développement de la fonction $e^{\frac{n\varepsilon}{2}(y-y^{-1})}$, est égal à l'intégrale définie

$$\frac{1}{2i\pi}\int_B \frac{e^{\frac{n\varepsilon}{2}(y-y^{-1})}}{y^{n-p+1}}\,dy,$$

prise suivant le chemin B déjà défini plus haut. Il suffit d'appliquer la formule donnée à la fin du n° 55 pour trouver la valeur asymptotique des intégrales de cette forme. La fonction désignée par φ dans cette formule est ici $\frac{1}{y} e^{\frac{\varepsilon}{2}(y-y^{-1})}$, et le point (a) est $y = \frac{1}{0}$.

On peut appliquer le même procédé en supposant que le nombre ε est supérieur à l'unité. En faisant $\varepsilon = \text{séc}\,\psi$, ψ étant un angle aigu positif, il existe alors deux points (a), savoir $y = e^{\pm i\psi}$, et l'on trouve pour valeur asymptotique de $J_{n-p}(n\varepsilon)$ l'expression

$$\sqrt{\frac{2}{n\pi \operatorname{tang}\psi}} \sin\left[n \operatorname{tang}\psi - (n-p)\psi + \frac{\pi}{4}\right].$$

La même méthode s'applique encore sans peine à la recherche de la valeur asymptotique de la fonction

$$J_n(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_B \frac{e^{\frac{t}{2}(y-y^{-1})}}{y^{n+1}}\,dy,$$

lorsqu'on suppose la valeur de t très grande et positive. Ici la fonction φ est $e^{\frac{1}{2}(y-y^{-1})}$; il y a deux points (a), d'affixes $\pm i$, et la valeur asymptotique cherchée est

$$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin\left(t - n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Ce résultat peut être complété de la façon suivante. En différentiant la relation (c')

$$2J'_n(t) = J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t),$$

et faisant usage de cette relation même ainsi que de la formule (c), on voit que la fonction $J_n(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2 J_n}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dJ_n}{dt} + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right) J_n = 0,$$

que l'on peut remplacer par

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{t^2}\right) z = 0,$$

en faisant

$$J_n(t) = z\sqrt{\frac{2}{\pi t}}.$$

Or, l'intégrale générale de cette dernière équation peut se développer *formellement* en série semi-convergente analogue à la série bien connue de Stirling : supposons en effet

$$z = \left(A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \frac{D}{t^3} + \ldots\right) \sin\left(t - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$+ \left(A' + \frac{B'}{t} + \frac{C'}{t^2} + \frac{D'}{t^3} + \ldots\right) \cos\left(t - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

A, A' étant des constantes arbitraires, et B, C, ..., B', C', ... des coefficients constants; on trouve immédiatement

$$B = -\frac{A'}{2}\left(n^2 - \frac{1}{4}\right), \qquad B' = \frac{A}{2}\left(n^2 - \frac{1}{4}\right),$$
$$C = -\frac{B'}{4}\left(n^2 - \frac{9}{4}\right), \qquad C' = \frac{B}{4}\left(n^2 - \frac{9}{4}\right),$$
$$D = -\frac{C'}{6}\left(n^2 - \frac{25}{4}\right), \qquad D' = \frac{C}{6}\left(n^2 - \frac{25}{4}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'après le résultat obtenu directement ci-dessus, on aura donc le développement asymptotique de $J_n(t)$ en faisant $A = 1$, $A' = 0$, d'où

$$J_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin\left(t - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\times \left[1 - \frac{\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)\left(n^2 - \frac{9}{4}\right)}{2.4.t^2} + \frac{\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)\left(n^2 - \frac{9}{4}\right)\left(n^2 - \frac{25}{4}\right)\left(n^2 - \frac{49}{4}\right)}{2.4.6.8t^4} - \ldots\right]$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos\left(t - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \times \left[\frac{n^2 - \frac{1}{4}}{2t} - \frac{\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)\left(n^2 - \frac{9}{4}\right)\left(n^2 - \frac{25}{4}\right)}{2.4.6t^3} + \ldots\right].$$

On peut démontrer que pour chacune des séries divergentes qui figurent dans cette formule, l'erreur commise est inférieure au premier terme négligé, et de même signe.

Pour utiliser les fonctions $J_n(t)$, il faut savoir les calculer, avec une précision déterminée, pour une valeur donnée de t, et pour toutes les valeurs 0, 1, 2, ... de l'indice n. Voici la marche que l'on peut suivre pour résoudre cette question, en évitant tout risque d'une perte de précision, si l'on ne dispose pas de tables appropriées.

On déterminera d'abord la plus grande valeur utile de n, c'est-

à-dire le plus petit nombre N tel que $J_{N+1}(t)$ soit négligeable au degré d'approximation requis. On s'aidera à cet effet des formules (b) ou (g), la première étant suffisante lorsque t n'est pas très grand, ce qui est le cas de beaucoup le plus fréquent.

La limite N étant connue, on calculera successivement, par logarithmes, en ayant soin de ne pas prendre plus de chiffres qu'il n'est nécessaire, les rapports k_N, k_{N-1}, k_{N-2}, ... ou plutôt leurs inverses, par la formule (d), en faisant d'abord $k_{N+1} = 0$. Ce calcul, extrêmement simple et rapide, sera poursuivi jusqu'à la détermination de k_1, si l'on a $t \leqq 1$; il ne restera plus qu'à chercher directement la valeur de $J_0(t)$ par la série (α), et l'on en déduira successivement, en abrégeant l'écriture comme ci-dessus,

$$J_1 = k_1 J_0, \quad J_2 = k_2 J_1, \quad J_3 = k_3 J_2, \quad \ldots, \quad J_N = k_N J_{N-1}.$$

Comme vérification, on pourra constater que l'on a

$$1 = J_0 + 2J_2 + 2J_4 + 2J_6 + \ldots,$$

ainsi que le montre la première équation (e).

Si t dépasse l'unité, on déterminera le plus petit entier q supérieur à $\frac{N}{6}$ et au moins égal à $\frac{t-1}{2}$, et l'on arrêtera le calcul des rapports k_n à k_{2q+1}; puis on cherchera les nombres α_k, β_k qui correspondent à cette valeur de q. Dans ces conditions, la dernière des formules (f) donne d'abord exactement, au degré de précision demandé,

$$J_{2q} = \frac{1}{2q} \sum (-1)^k \alpha_k,$$

et l'on en déduit

$$J_{2q+1} = k_{2q+1} J_{2q}, \quad J_{2q+2} = k_{2q+2} J_{2q+1}, \quad \ldots, \quad J_N = k_N J_{N-1}.$$

Les autres formules (f) et les formules (f') donnent enfin

$$J_0, \quad J_2, \quad J_4, \quad \ldots, \quad J_{2q-2} \quad \text{et} \quad J_1, \quad J_3, \quad J_5, \quad \ldots, \quad J_{2q-1}.$$

On peut vérifier, et même abréger partiellement les calculs, en faisant usage de la relation (c), mais de façon à éviter toute perte de précision. On peut aussi s'aider des développements asymptotiques donnés ci-dessus.

Exemples. — 1° On donne $t = 1$, et l'on demande l'approximation

de la sixième décimale, de sorte qu'il convient de conserver la septième, afin d'éviter toute accumulation d'erreurs.

On peut prendre $N = 8$, et l'on trouve sans peine

$$J_0 = 0,7651977,\quad J_3 = 0,0195633,\quad J_6 = 0,0000209,$$
$$J_1 = 0,4400507,\quad J_4 = 0,0024766,\quad J_7 = 0,0000015,$$
$$J_2 = 0,1149035,\quad J_5 = 0,0002498,\quad J_8 = 0,0000001.$$

2° On donne $t = 6$, et l'on demande l'approximation de la cinquième décimale.

On doit prendre par suite $N = 16$, $q = 3$; et l'on trouve, par les calculs les plus simples,

$$J_0 = 0,150645,\quad J_6 = 0,245837,\quad J_{12} = 0,000545,$$
$$J_1 = -0,276684,\quad J_7 = 0,129587,\quad J_{13} = 0,000133,$$
$$J_2 = -0,242873,\quad J_8 = 0,056532,\quad J_{14} = 0,000030,$$
$$J_3 = 0,114768,\quad J_9 = 0,021165,\quad J_{15} = 0,000006,$$
$$J_4 = 0,357642,\quad J_{10} = 0,006964,\quad J_{16} = 0,000001.$$
$$J_5 = 0,362087,\quad J_{11} = 0,002048,$$

81. En nous plaçant maintenant au point de vue analytique, proposons-nous d'abord l'étude des développements suivant les puissances de x, y ou z, de la fonction très générale

$$f = \left(\frac{r}{a}\right)^\rho y^\beta z^\gamma = \left(\frac{r}{a}\right)^\rho [\cos(\beta u + \gamma w) + i \sin(\beta u + \gamma w)],$$

sous la forme

$$f = \sum a_n x^n = \sum b_n y^n = \sum c_n z^n.$$

Les exposants ρ, β, γ sont quelconques; mais la somme $\beta + \gamma$ doit être entière, afin que la fonction f admette la période 2π par rapport à l'une quelconque des variables g, u, w, et que la possibilité des développements soit ainsi assurée.

On a

$$\begin{aligned} f &= \omega^\rho y^{\beta+\gamma} (1 - \theta y)^{\rho-\gamma} (1 - \theta y^{-1})^{\rho+\gamma} \\ &= \omega'^{-\rho} z^{\beta+\gamma} (1 + \theta z)^{-\rho-\beta} (1 + \theta z^{-1})^{-\rho+\beta}. \end{aligned}$$

Si donc on fait

$$(1 - \theta y)^p (1 - \theta y^{-1})^q = \sum K_n^{p,q} y^n,$$

on a directement

$$b_n = \omega^\rho K_{n-\beta-\gamma}^{\rho-\gamma,\rho+\gamma}, \qquad c_n = (-1)^{n-\beta-\gamma}\omega'^{-\rho} K_{n-\beta-\gamma}^{-\rho-\beta,-\rho+\beta}.$$

D'autre part, b_n est encore égal au coefficient de z^n dans le développement suivant les puissances de z de la fonction analogue $\frac{1}{\eta}\frac{r}{a}\left(\frac{z}{y}\right)^n f$; et de même c_n est le coefficient de y^n dans le développement suivant les puissances de y de $\eta\frac{a}{r}\left(\frac{y}{z}\right)^n f$. On a donc encore

$$b_n = (-1)^{n-\beta-\gamma}\frac{\omega'^{-\rho-1}}{\eta} K_{n-\beta-\gamma}^{-\rho-\beta+n-1,-\rho+\beta-n-1},$$
$$c_n = \eta\omega^{\rho-1} K_{n-\beta-\gamma}^{\rho-\gamma+n-1,\rho+\gamma-n-1}.$$

Si l'on désigne par m un entier quelconque, et si l'on fait, quel que soit p, suivant que m est positif, nul ou négatif,

$$C_p^m = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-m+1)}{1.2.3\ldots m}, \qquad C_p^0 = 1, \qquad C_p^m = 0,$$

on a évidemment

$$K_n^{p,q} = (-1)^n \sum \theta^{m'+m''} C_p^{m'} C_q^{m''},$$

la sommation s'étendant à tous les indices m', m'' non négatifs dont la différence $m' - m''$ est égale à n.

Les coefficients $K_n^{p,q}$, comme ceux que nous allons introduire ci-dessous, sont, à un facteur près, des séries hypergéométriques, et peuvent être étudiées de ce point de vue; en particulier, on démontre ainsi immédiatement l'équivalence des deux formes trouvées plus haut pour b_n ou c_n, c'est-à-dire en somme la formule

$$K_n^{p,q} = (-1)^n \left(\frac{\eta}{\omega}\right)^{p+q+1} K_n^{n-p-1,-n-q-1},$$

où l'on peut remplacer $\frac{\eta}{\omega}$ par $1-\theta^2$.

Sans insister sur ce point, observons que ces coefficients se présentent comme des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de même parité de θ, commençant par un terme en $\theta^{|n|}$; on peut donc décrire de la même façon les coefficients b_n et c_n, en substituant si l'on veut ε à θ, et il en est de même pour tous les coefficients analogues dans ce qui suit.

Le coefficient $K_n^{p,q}$ se réduit à un polynome dès que l'un des

nombres p, q est un entier positif ou nul; s'il en est ainsi de p, on a $K_n^{p,q} = 0$ pour $n > p$, et $K_n^{p,q} = (-\theta)^p$ pour $n = p$; et s'il en est ainsi de q, on a $K_n^{p,q} = 0$ pour $n < -q$, et $K_n^{p,q} = (-\theta)^q$ pour $n = -q$. Il en résulte que, dans bien des cas, les coefficients b_n, c_n peuvent s'exprimer sous forme finie.

La valeur asymptotique des coefficients $K_n^{p,q}$, et par suite b_n et c_n, lorsque n devient très grand en valeur absolue, est facile à déterminer par la règle du n° 55; il suffit de considérer le cas de n positif, puisque l'on a $K_n^{p,q} = K_{-n}^{q,p}$. La fonction $(1-\theta y)^p(1-\theta y^{-1})^q$ est développable comme nous le supposons pour les valeurs de y dont le module est compris entre θ et $\frac{1}{\theta}$; la valeur asymptotique cherchée est alors, si p n'est pas un entier positif ou nul,

$$\frac{\theta^n(1-\theta^2)^q n^{-p-1}}{\Gamma(-p)};$$

et pour $p = -1$, on a ainsi la valeur exacte de $K_n^{p,q}$, soit $\theta^n(1-\theta^2)^q$, d'après les observations précédentes.

Quand on suppose $\gamma = 0$ ou $\beta = 0$, on peut trouver d'autres expressions pour les coefficients b_n ou c_n; on ne diminue d'ailleurs pas la généralité en supposant simultanément $\beta = \gamma = 0$, puisque le développement de f suivant les puissances de y ou z résulte immédiatement de celui de $\frac{f}{y^\beta}$ ou $\frac{f}{z^\gamma}$.

Prenant donc simplement

$$f = \left(\frac{r}{a}\right)^\rho,$$

on peut écrire

$$f = \left[1 - \frac{\varepsilon}{2}(y + y^{-1})\right]^\rho = \eta^{2\rho}\left[1 + \frac{\varepsilon}{2}(z + z^{-1})\right]^{-\rho}.$$

Faisant alors

$$\left[1 - \frac{\varepsilon}{2}(y + y^{-1})\right]^p = \sum H_n^p y^n,$$

on a

$$b_n = H_n^\rho, \qquad c_n = (-1)^n \eta^{2\rho} H_n^{-\rho};$$

de plus, évidemment, en supposant n positif ou nul, on a

$$H_n^p = H_{-n}^p = (-1)^n \sum \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+2m} C_p^{n+2m} C_{n+2m}^m,$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs entières non négatives de m. Ce développement est fini dès que p est un entier positif ou nul, et dans ce cas il se réduit à zéro pour $n > p$, à $\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$ pour $n = p$.

En comparant aux résultats précédents, on a

$$H_n^p = \omega^p K_n^{p,p},$$

de sorte que, dans le cas particulier de $n = 0$,

$$H_0^p = \eta^{2p+1} H_0^{-p-1};$$

et par suite, le coefficient H_0^p peut toujours se développer sous forme finie dès que p est un entier quelconque.

Pour $p = -1$, on a encore

$$\theta^n = \eta H_n^{-1},$$

égalité qui conduit à des résultats intéressants : en y remplaçant d'abord η par $\frac{\theta\, d\varepsilon}{\varepsilon\, d\theta}$ et intégrant, il vient en effet

$$\theta^n = \sum \frac{n}{n+2m} C_{n+2m}^m \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+2m},$$

développement valable évidemment pour toute valeur de n, et que donne aussi la formule de Lagrange appliquée à l'équation

$$\theta = \frac{\varepsilon}{2}(1+\theta^2);$$

d'autre part, on a pour $n = 0$

$$\eta^{-1} = \sum C_{2m}^m \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2m},$$

ce qui est un cas particulier de la formule générale évidente

$$\eta^n = 1 + \sum_1^\infty (-1)^m \frac{n(n-2)(n-4)\ldots(n-2m+2)}{1.3.5\ldots(2m-1)} C_{2m}^m \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2m},$$

valable quel que soit n, et d'où résulte par exemple

$$\eta = -\sum \frac{C_{2m}^m}{2m-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2m}, \qquad \eta^3 = \sum \frac{3\, C_{2m}^m}{(2m-1)(2m-3)}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2m}, \qquad \ldots\ldots$$

Pour développer maintenant la fonction f suivant les puissances

de x, on sait que le coefficient a_n est égal au coefficient de y^n dans le développement suivant les puissances de y de la fonction

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\rho+1} y^\beta z^\gamma e^{\frac{n\varepsilon}{2}(y-y^{-1})}.$$

Donc le coefficient a_0 est égal au coefficient b_0 déterminé ci-dessus, à la condition de remplacer ρ par $\rho+1$; et, en général, sous la même condition, on a

$$a_n = \sum b_{n'} \mathrm{J}_{n''}(n\varepsilon),$$

en étendant la sommation à toutes les valeurs positives ou non de n' et n'' dont la somme est n.

On sait aussi que si l'on a $\mathrm{D}_y f = \sum b'_n y^n$, on peut écrire, pour n non nul,

$$a_n = \sum \frac{b'_{n'}}{n} \mathrm{J}_{n''}(n\varepsilon),$$

dans les mêmes conditions.

La valeur asymptotique du coefficient a_n pour les grandes valeurs de n est encore facile à trouver; il suffit d'ailleurs de considérer les valeurs positives de n, car on passe de a_n à a_{-n} en changeant le signe de β et γ. La fonction f est développable comme nous le supposons pour les valeurs de x dont le module est compris entre les nombres x_1 et x_2 déterminés au n° 79, de sorte que la valeur cherchée résulte de la considération du point singulier d'affixe $x_1 = \frac{1}{\theta} e^{-\eta}$ situé sur le cercle extérieur de convergence. Dans le domaine de ce point, on a, d'après ce que nous avons vu plus haut,

$$f = \omega^\rho \theta^{-\beta-\gamma}(1-\theta^2)^{\rho+\gamma} \left(\frac{2}{\eta}\right)^{\frac{\rho-\gamma}{2}} \left(1-\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{\rho-\gamma}{2}},$$

et par suite, la valeur asymptotique de a_n est

$$\omega^{-\gamma} \theta^{n-\beta-\gamma} \eta^{\rho+\gamma} \left(\frac{2}{\eta}\right)^{\frac{\rho-\gamma}{2}} e^{n\eta} \frac{n^{\frac{\gamma-\rho}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{\gamma-\rho}{2}\right)},$$

si du moins $\frac{\rho-\gamma}{2}$ n'est pas un entier positif ou nul; dans le cas contraire, il faudrait, pour arriver au résultat, aller plus loin dans le développement de f autour du point singulier x_1.

Les coefficients a_n n'ont des expressions simples que dans quelques cas particuliers, que l'on peut résumer de la façon suivante.

L'application des règles énoncées ci-dessus donne d'abord immédiatement

$$\frac{a}{r} y^\beta = \sum J_{n-\beta}(n\varepsilon) x^n,$$

$$y^\beta = a_0 + \sum{}' \frac{\beta}{n} J_{n-\beta}(n\varepsilon) x^n,$$

le signe $\sum'$ indiquant que la valeur $n = 0$ est exclue de la sommation; le terme constant a_0 dans la seconde formule est égal à 1 pour $\beta = 0$, à $-\frac{\varepsilon}{2}$ pour $\beta = \pm 1$, à 0 dans les autres cas. Au surplus, ces deux formules sont équivalentes, puisque l'on a

$$D_x y = \frac{a}{r} y.$$

On en déduit, par les relations (c) et (c') du numéro précédent,

$$\frac{a}{r} \cos u = \frac{1}{\varepsilon} \sum{}' J_n(n\varepsilon) x^n,$$

$$\frac{a}{r} i \sin u = \sum{}' J'_n(n\varepsilon) x^n,$$

$$\cos u = -\frac{\varepsilon}{2} + \sum{}' \frac{J'_n(n\varepsilon)}{n} x^n,$$

$$i \sin u = \frac{1}{\varepsilon} \sum{}' \frac{J_n(n\varepsilon)}{n} x^n.$$

Il est facile alors d'en conclure d'autres développements, en se servant des formules du mouvement elliptique.

On a d'abord

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \cos u = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} - \varepsilon \sum{}' \frac{J'_n(n\varepsilon)}{n} x^n,$$

$$i(u - g) = \varepsilon i \sin u = \sum{}' \frac{J_n(n\varepsilon)}{n} x^n;$$

puis, comme on a

$$D_x\left(\frac{r}{a}\right) = -\varepsilon i \sin u \frac{a}{r},$$

et, par suite,

$$D_x\left(\frac{r^2}{a^2}\right) = -2\varepsilon i \sin u,$$

il vient

$$\frac{r^2}{a^2} = 1 + \frac{3\varepsilon^2}{2} - 2\sum{}' \frac{J_n(n\varepsilon)}{n^2} x^n,$$

le coefficient constant du second membre étant H_0^3; on en déduit la relation

$$\frac{1}{2} D^2_{x^2}\left(\frac{r^2}{a^2}\right) + \frac{a}{r} = 1,$$

bien facile à vérifier directement.

On a encore

$$\frac{X}{a} = \frac{r}{a}\cos w = \cos u - \varepsilon = -\frac{3\varepsilon}{2} + \sum{}' \frac{J'_n(n\varepsilon)}{n} x^n,$$

$$\frac{iY}{a} = \frac{r}{a} i\sin w = \eta i \sin u = \frac{\eta}{\varepsilon}\sum{}' \frac{J_n(n\varepsilon)}{n} x^n,$$

et aussi

$$\cos w = \frac{a}{r}\cos u - \varepsilon\frac{a}{r} = -\varepsilon + \frac{\eta^2}{\varepsilon}\sum{}' J_n(n\varepsilon)x^n,$$

$$i\sin w = \eta\frac{a}{r} i\sin u = \eta\sum{}' J'_n(n\varepsilon)x^n;$$

$$\frac{a^3}{r^3}\frac{X}{a} = \frac{a^2}{r^2}\cos w = D^2_{x^2}\left(\frac{X}{a}\right) = \sum{}' n J'_n(n\varepsilon)x^n,$$

$$\frac{a^3}{r^3}\frac{iY}{a} = \frac{a^2}{r^2} i\sin w = D^2_{x^2}\left(\frac{iY}{a}\right) = \frac{\eta}{\varepsilon}\sum{}' n J_n(n\varepsilon)x^n.$$

On aurait de même, mais sous une forme moins simple,

$$\frac{a}{r}\cos 2u = \sum{}' \left[\frac{1+\eta^2}{\varepsilon^2} J_n(n\varepsilon) - \frac{2J'_n(n\varepsilon)}{n\varepsilon}\right] x^n,$$

$$\frac{a}{r} i\sin 2u = \sum{}' \left[\frac{2J'_n(n\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{2J_n(n\varepsilon)}{n\varepsilon^2}\right] x^n,$$

$$\cos 2u = \sum{}' \left[\frac{4J'_n(n\varepsilon)}{n\varepsilon} - \frac{4J_n(n\varepsilon)}{n^2\varepsilon^2}\right] x^n,$$

$$i\sin 2u = \sum{}' \left[\frac{2(1+\eta^2)}{n\varepsilon^2} J_n(n\varepsilon) - \frac{4J'_n(n\varepsilon)}{n^2\varepsilon}\right] x^n,$$

et l'on en déduirait sans peine les développements des fonctions dépendant de l'angle $2u$, telles que $\cos(w-u)$ ou $\sin(w-u)$; et ainsi de suite.

82. On peut déterminer le développement analytique d'une fonction f suivant les puissances de x d'une autre façon, quand on fait

l'hypothèse encore très générale que cette fonction est développable suivant les puissances entières et positives des deux quantités

$$y_1 = \frac{\varepsilon}{2} y, \qquad y_2 = \frac{\varepsilon}{2} y^{-1},$$

sous la forme

$$f = \sum b_{q_1, q_2} y_1^{q_1} y_2^{q_2},$$

q_1 et q_2 étant des entiers non négatifs.

D'après la nature déjà reconnue des coefficients a_n, on peut alors écrire aussi

$$f = \sum a_{p_1, p_2} x_1^{p_1} x_2^{p_2},$$

en faisant

$$x_1 = \frac{\varepsilon}{2} x, \qquad x_2 = \frac{\varepsilon}{2} x^{-1},$$

et désignant par p_1 et p_2 des entiers non négatifs ; et l'on a

$$a_n = \sum a_{p_1, p_2} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p_1 + p_2},$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs de p_1 et p_2 dont la différence $p_1 - p_2$ est n.

Or a_n est le coefficient de y^n dans le développement suivant les puissances de y de

$$\frac{r}{a} f e^{\frac{n\varepsilon}{2}(y - y^{-1})};$$

il en résulte visiblement que a_{p_1, p_2} n'est autre chose que le coefficient de $y_1^{p_1} y_2^{p_2}$ dans le développement suivant les puissances de y_1 et y_2 de la fonction

$$(1 - y_1 - y_2) f e^{(p_1 - p_2)(y_1 - y_2)}.$$

En écrivant $e^{(p_1 - p_2)(y_1 - y_2)}$ sous la forme $e^{(p_1 - p_2) y_1} \times e^{-(p_1 - p_2) y_2}$, le coefficient de $y_1^{p_1} y_2^{p_2}$ dans le produit $y_1^{q_1} y_2^{q_2} e^{(p_1 - p_2)(y_1 - y_2)}$ est

$$(-1)^{p_2 - q_2} \frac{(p_1 - p_2)^{p_1 + p_2 - q_1 - q_2}}{(p_1 - q_1)!\,(p_2 - q_2)!},$$

en désignant par $p!$ la factorielle $1.2.3\ldots p$ lorsque p est un entier positif, et en faisant $p! = 1$ quand p est nul, $p! = \infty$ quand p est un entier négatif.

Par suite il vient, après réduction,

$$a_{p_1, p_2} = \sum b_{q_1, q_2} (-1)^{p_2 - q_2} \frac{(q_1 - q_2)(p_1 - p_2)^{p_1 + p_2 - q_1 - q_2 - 1}}{(p_1 - q_1)!\,(p_2 - q_2)!};$$